CHIZIQLI ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISH USULLARI HAQIDA

Muzaffarova Mohinur Umarovna

Buxoro davlat universiteti

Fizika-matematika fakulteti talabasi

Annotatsiya: Maqola chiziqli oddiy differensial tenglamalarni, xususan, amaliy mashg'ulotlarda va nazorat masalalarida uchraydigan Bernulli tenglamalarini echishga bag'ishlangan. Talabalar mavzuni oson tushunishlari uchun bir nechta qiyinroq misollarni yechish usullari sodda tarzda tushuntirilgan.

Kalit so'zlar: Funksiya, hosila, uzluksiz funksiyalar, chiziqli differensial tenglama, integral, Bernulli tenglamasi.

Ko'pgina hollarda talabalar tomonidan chiziqli oddiy differensial tenglamalarni yechishda bir qator muammolarga duch kelinadi. Asosan bu qiyinchiliklar oddiy differensial tenglamani yechishda o'zgarmasdan (o'zgarmasni funsiya deb olib) hosila olib, u yordamida asosiy misolni yechishda kuzatiladi. Shu munosabat bilan maqolada bu mavzuni kengroq va soddaroq yoritishga harakat qilindi.

Ta'rif. *Noma'lum funksiya va uning hosilasiga nisbatan chiziqli bo'lgan tenglama chiziqli oddiy differensial tenglama deyiladi. Bunday tenglama*

$$\frac{dx}{dy} + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bu yerda $P(x)$ va $Q(x)$ – berilgan uzluksiz funksiyalar [1-2].

(1) tenglama yechimini ikki funksiya ko'paytmasi ko'rinishida qidiramiz:

$$y = u(x)v(x). \tag{2}$$

Bu funksiyalarning birini ixtiyoriy deb olib, ikkinchisi esa (1) tenglama orqali topiladi. (2) tenglikning ikki tomonini differensiallaymiz:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Topilgan hosila ifodasini (1) tenglamaga qo'yib,

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+Puv=Q \quad \text{yoki} \quad u(\frac{dv}{dx}+Pv)+v\frac{du}{dx}=Q \qquad (3)$$

bo'lishini topamiz. v funksiyani

$$\frac{dv}{dx}+Pv=0 \qquad (4)$$

shartni qanoatlantiradigan qilib olamiz. Bu differensial tenglamada v ga nisbatan o‘zgaruvchini ajratib, quyidagini topamiz:

$$\frac{dv}{v}=-Pdx.$$

Ushbu tenglamani integrallab

$$-\ln|C_1|+\ln|v|=-\int P\,dx \quad \text{yoki} \quad v=C_1e^{-\int Pdx}$$

bo‘lishini topamiz.

Bizga (4) tenglamaning noldan farqli biror yechimi yetarli bo'lgani uchun $v(x)$ sifatida

$$v=e^{-\int Pdx} \qquad (5)$$

funksiyani olamiz, bu yerda $Pdx-$ qandaydir boshlang‘ich funksiya. Topilgan $u(x)$ ning qiymatini (3) tenglamaga qo‘yib,

$$v(x)\frac{du}{dx}=Q(x) \quad \text{yoki} \quad \frac{du}{dx}=\frac{Q(x)}{v(x)}$$

ekanligini topamiz, bu yerdan

$$u=\int\frac{Q(x)}{v(x)}dx+C$$

ni topamiz. u va v larni (2) formulaga qo'yib, nihoyat

$$y=v(x)\left[\int\frac{Q(x)}{v(x)}dx+C\right] \text{ yoki } y=e^{-\int Pdx} \qquad (6)$$

ifodani, ya’ni (1) ning umumiy yechimini topamiz [3-4].

1-misol. Tenglamani yeching $xy'-2y=2x^4$

Yechish. Avval chiziqli tenglamaning yechimini topamiz:

$$xy'-2y=0,$$

$$x\frac{dy}{dx}=y,$$

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}.$$

Tenglamani ikkala tomonini integrallaymiz:

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x},$$

$$ln|y| = 2\,ln|x| + lnC,$$

$$y = Cx^2.$$

Bo'linish paytida $y = 0$ va $x = 0$ yechimlari yo'qolishi mumkin. Shubhasiz, $y = 0$ va $x = 0$ yechimlar emas.

C doimiyni x ga bog’liq funksiyasi deb hisoblagan holda, biz bir jinsli tenglamaning, ya’ni

$$y = C(x)x^2$$

yechimini berilgan tenglamaga keltirib qo’yamiz:

$$y' = C'x^2 + 2Cx,$$

$$x(C'x^2 + 2Cx) - 2Cx^2 = 2x^4,$$

$$C'x^3 = 2x^4,$$

$$C' = 2x.$$

Bundan quyidagiga ega bo’lamiz:

$$C(x) = x^2 + C_1.$$

Hosil bo’lgan yechimni bir jinsli tenglamaga qo’yamiz:

$$y = Cx^2 = (x^2 + C_1)x^2 = x^4 + C_1x^2.$$

Javob: $y = x^4 + C_1x^2$.

2-misol. Tenglamani yeching $(2x + 1)y' = 4x + 2y$.

Yechish. Bir jinsli tenglamani topamiz:

$$(2x + 1)y' = 2y$$

O’zgaruvchilarni ajratamiz

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{2x + 1}.$$

Tenglamani ikkala tomonini integrallaymiz:

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{2x+1},$$

$$ln|y| = C(2x+1).$$

Shunday qilib, bir jinsli tenglamaning yechimiga ega bo'lamiz:

$$y = C(2x+1).$$

C doimiyni x ga bog'liq funksiyasi deb hisoblagan holda, biz bir jinsli tenglamaning yechimini berilgan tenglamaga keltirib qo'yamiz.

$$y' = C'(2x+1) + 2C,$$

$$(2x+1)(C'(2x+1) + 2C) = 4x + 2C(2x+1),$$

$$(2x+1)C'(2x+1) = 4x,$$

$$C' = \frac{4x}{(2x+1)^2},$$

$$C = \int \frac{4x}{(2x+1)^2} = 2\int \frac{2x+1-1}{(2x+1)^2} =$$

$$= 2\int \frac{1}{(2x+1)^2} - 2\int \frac{1}{(2x+1)^2}$$

$$= l\,n|2x+1|.$$

Hosil bo'lgan yechimni bir jinsli tenglamaga qo'yamiz:

$$y = C(2x+1) = (2x+1)(ln|2x+1| + C_1) + 1.$$

Javob. $y = (2x+1)(ln|2x+1| + C_1) + 1.$

Bayon qilingan usuldan foydalanib, Bernulli tenglamasini yechishga doir misollar keltiramiz.

Ta'rif .

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \geq 2 \tag{8}$$

ko'rinishdagi tenglama Bernulli tenglamasi deb ataladi, bu yerda $P(x)$ va $Q(x)$ — berilgan uzluksiz funksiyalar, $n \neq 0;\ 1$ [1-2].

Tenglamaning barcha hadlarini y^n ga bo'lamiz.

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{-n+1} = Q(x) \tag{9}$$

va $z = y^{-n+1}$ almashtirishni bajaramiz, u holda

$$\frac{dz}{dx}=(-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

Topilgan qiymatni (9) tenglamaga qo‘yib,

$$\frac{dz}{dx}+(-n+1)P(x)z=(-n+1)$$

chiziqli tenglamani hosil qilamiz. Chiziqli tenglamaning umumiy integralini topgandan so‘ng, z o‘rniga y^{-n+1} ni qo‘yib, Bernulli tenglamasining umumiy integralini hosil qilamiz.

3-misol. $y'x^3 siny=xy'-2y$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglama o'zgaruvchining y ga nisbatan chiziqli emas (va y o'zgaruvchisiga nisbatan chiziqli shakliga keltirib bo’lmaydi). Shuning uchun x ni y ning funksiyasi deb qaraymiz:

$$\frac{dy}{dx}x^3 siny=x\frac{dy}{dx}-2y,$$

$$2y=\frac{dy}{dx}(x-x^3 siny),$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x-x^3 siny}{2y},$$

$$x'-\frac{x}{2y}=-\frac{x^3 siny}{2y}.$$

Bo'linish paytida $y\ =\ 0$ yechim yo'qolishi mumkin. Shubhasiz, $y=0$ yechim emas.

Berilgan tenglama Bernulli tenglamasi bo’lib, $n=3$. Bernulli tenglamasini yechish uchun uning ikkala qismini ham x^n va $\frac{1}{x^{n-1}}=z$ almashtirishni amalga oshirish bo'lish kerak.

Tenglamani x^3 ga bo’lamiz:

$$\frac{x'}{x^3}-\frac{1}{2yx^2}=-\frac{siny}{2y}$$

va $\frac{1}{x^2}=z$ almashtirishni amalga oshiramiz.

$$z'=\frac{1}{x^3}x',$$

$$x'=-\frac{1}{2}z'^{x^3}.$$

Quyidagiga ega bo’lamiz:

$$-\frac{1}{2}z' - \frac{z}{2y} = -\frac{siny}{2y},$$

$$z' + \frac{z}{y} = -\frac{siny}{y}.$$

Bu chiziqli differensial tenglama. Bir jinsli tenglamaning yechimini yuqorida ko‘rsatilgan usuldan foydalanib topamiz:

$$z' + \frac{z}{y} = 0.$$

O’zgaruvchilarni ajratamiz:

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dy}{y}.$$

Tenglamani ikkala tomonini integrallaymiz:

$$\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dy}{y},$$

$$\ln|z| - \ln|y| + lnC.$$

Shunday qilib, bir jinsli tenglamaning yechimi:

$$z = \frac{C}{y}.$$

C ni y ga bog’liq funksiya deb hisoblab, bir jinsli tenglamaning yechimini yuqoridagi tenglamaga qo’yamiz.

$$z' = C'\frac{1}{y} - C\frac{1}{y^2},$$

$$C'\frac{1}{y} - C\frac{1}{y^2} + \frac{C}{y}\frac{1}{y} = \frac{siny}{y},$$

$$C'\frac{1}{y} = \frac{siny}{y},$$

$$C' = siny,$$

$$C = \int siny\, dy = -cosy + C_1.$$

Hosil bo’lgan funksiyani bir jinsli tenglama yechimiga qo’yamiz.

$$z = \frac{C}{y} = \frac{-cosy + C_1}{y},$$

$$\frac{1}{x^2}=\frac{-cosy+C_1}{y},$$

$$y=x^2(C_1-cosy).$$

Bizga berilgan tenglamaning yechimi:

$$y=x^2(C_1-cosy);\quad y=0.$$

4-misol. $xy'+y=y^2x^5$ tenglamani yeching.

Yechish. Ushbu tenglamani yechish uchun nazariyada keltirilgan barcha usullarni (masalan to‘g‘ridan-to‘g‘ri o‘zgarmasni variasiyalashni bajarmasdan, yechimni ko‘paytma shaklida qidiramiz va hokazo) amalga oshiramiz. Bundan maqsad Bernulli tenglamasining yechish usulining mohiyatini talabalarga yanada chuqurroq o‘rgatish va tushunishlariga e'tibor qaratish hisoblanadi. Ikki funksiya ko’paytmasi ko’rinishidagi yechimni qidiramiz: $y=uv$, demak

$$y'=u'v+uv'.$$

Buni berilgan tenglamaga eltib qo‘yamiz:

$$x(u'v+uv')+uv=u^2v^2x^5. \tag{10}$$

Qavslar ichidagi ifoda nolga teng bo'ladigan v ni tanlaymiz:

$$xv'+v=0. \tag{11}$$

(11) tenglamani (10) qo’yib, o’zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamaga ega bo’lamiz:

$$xvu'=u^2v^2x^5. \tag{12}$$

Endi (11) tenglamani noldan farqli yechimini topamiz.

$$x\frac{dv}{dx}+v=0\ \Rightarrow\ \frac{dv}{dx}+\frac{dx}{x}=0,$$

$$\int\frac{dv}{dx}+\int\frac{dx}{x}=C\ \Rightarrow\ ln|v|+ln|x|=C,$$

$$ln|vx|=C\ \Rightarrow\ |vx|=e^C \text{ yoki } vx=\pm e^C.$$

Musbat ishorali javobni $vx=e^C$ va $C=0$ olamiz. Shunda $vx=1$ hosil bo’ladi. $v=\frac{1}{x}$ ni (12) tenglamaga qo’yib, o’zgaruvchilarni ajratamiz va integrallaymiz.

$$xvu'=u^2v^2x^5\ \Rightarrow\ \frac{x}{x}u'=u^2\frac{x^5}{x^2},$$

$$u'=u^2x^3\ \Rightarrow\ \frac{du}{dx}=u^2x^3.$$

$u \neq 0$ bo'lsa,

$$\frac{du}{u^2} - x^3dx = 0 \;\Rightarrow\; \int \frac{du}{u^2} - \int x^3dx = C,$$

$$-\frac{1}{u} - \frac{1}{4}x^4 = C \;\Rightarrow\; \frac{1}{u} = -\frac{1}{4}x^4 - C \;\Rightarrow$$

$$u = -\frac{-1}{\frac{1}{4}x^4 + C} = \frac{-4}{x^4 + 4C}.$$

u va v funksiyalarni topdik. Endi y funksiyani topamiz:

$$y = uv = \frac{-4}{x^4 + 4C} \cdot \frac{1}{x} = \frac{-4}{x^5 + 4Cx} \;\Rightarrow$$

$$y = \frac{-4}{x^5 + 4Cx}.$$

Javob. $y = \frac{-4}{x^5+4Cx}$ va $y = 0$ berilgan tenglamaning yechimlari.

Qo'shimcha ma'lumot. Daniel Bernulli Rossiyada ishlayotganda, suyuqlik bosimining uning tezligi bilan bog'liqligini o'rganib, qonunni ishlab chiqqan. Bernuli tenglamasi faqat matematika yoki algebrada emas fizikada ham muhim orin tutadi. Bernuli tenglamasi yordamida fizikada bu tenglama sizga ixtiyoriy o'lchamdagi nayda harakatlanayotgan suyuqlik harakatini tahlil qilish imkonini beradi.

Muallif tomonidan xususiy hosilali va oddiy differensial tenglamalarni o'rganishga bag'ishlangan maqolalar nashr qilingan [5-6]. Mazkur yo'nalishda olib borilgan ilmiy izlanishlar jarayonida oddiy differensial tenglamalar va oddiy differensial tenglamalar sistemasini sifatiy tahlil qilishga bag'ishlangan [7-8] maqolalar o'rganildi. Oddiy differensial tenglamalar sistemasini sifatiy tahlil qilishga doir ilmiy yo'nalishda izlanishlar olib borib, xorijiy jurnallarga maqola tayyorlash belgilab olingan.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Филлипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика, 2000 г., 177 с.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений, Издания стереотип, 2022 г.. 512 с.

3. Зайцев В. Полянин А. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2001 г., 576 с.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 1976 г., 589 с.
5. Музаффарова М.У. Частные производные и дифференцирование функций нескольких переменных // «Pedagogs» international research journal, 41:1 (2023), стр. 35-43.
6. Музаффарова М.У. Методы построение дифференциального уравнения по заданному семейству кривых // Journal of Theory, Mathematics and Physics. 2:11 (2003), стр.27-32.
7. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // Communications in Mathematics, 30 (2022), no. 1, pp. 239-250.
8. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.