2nd Sun YOSH TADQIQOTCHI JURNALI Vol. 1 No. 2 (2022)

“YOSH TADQIQOTCHI”
ilmiy elektron jurnali

Vebsayt: http://2ndsun.uz/index.php/yt

РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЕЙ

Умаров Хабибулло Рахматуллаевич, Хайитбаева Диёра Икромовна

Гулистанский государственный университет

Инфо:

Принято: 28.02.2022
Просмотрено: 01.03.2022
Опубликовано: 02.03.2022

Ключевые слова: *Ряд Тейлора, предельная точка, правила Лопиталя, логарифм, экспонент.*

Аннотация

В данной статье изучаются основные виды неопределенностей, возникающих при нахождении пределов. Приведены некоторые методы раскрытия неопределённостей

Copyright © 2022. Creative Commons Attribution 4.0 International License

ВВЕДЕНИЕ

Раскрытие неопределённостей – методы вычисления пределов функции, заданных формулами, которые в результате формальной подстановки в них аргумента теряют смысл, то есть переходят в выражения типа: (∞-∞), (∞/∞), (0/0), (0·∞), (00), (1∞), (∞0). Здесь 0 – бесконечно малая величина, а ∞ - бесконечно большая величина.

Раскрыть неопределённости позволяет:

1. Упрощение вида функции (преобразование с использованием формул сокращенного умножения, тригонометрических формул и т.д.).
2. Использование замечательных пределов.
3. Применение правила Лопиталя.
4. Использование замены бесконечно малого выражения ему эквивалентным.

Самым мощным методом является правило Лопиталя, однако и оно не во всех случаях позволяет вычислить предел. Способ такого рода неопределённостей был опубликован в учебнике «Analyse des Infiniment Petits» 1696 года за авторством Гийома Лопиталя. Метод был сообщён Лопиталю в письме его первооткрывателем Иоганном Бернулли. К тому же напрямую оно применимо только ко второму и третьему из перечисленных видов неопределённостей, то есть отношением, и чтобы раскрыть другие типы, их надо сначала привести к одному из этих. Также для вычисления пределов часто используется разложение выражений, входящих в исследуемую неопределённость, в ряд Тейлора в окрестности предельной точки.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Первое правило Лопиталя (неопределённость вида 0/0 при x→a-). Теорема 1. Пусть:

1) f(x) и g(x) определены и дифференцируемы в некотором интервале (a-b1, a), b1>0;
2) $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} g(x)$=0;
3) f '(x), g '(x) ≠0 при всех x принадлежащих (a-b2, a) при некотором b2>0;
4) существует конечный или бесконечный предел при x→a отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$, т.е. $\lim\limits_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует предел отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ и имеет место равенство

$$\lim_{x\to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Можно считать , что предел $\frac{f(x)}{g(x)}$ при x→a- является конечным числом и равен l, поскольку если это не так, то можно рассмотреть отношение $\frac{g(x)}{f(x)}$.

Доопределим f(x) и g(x) в точке x=a, пологая f(a)=g(a)=0. Тогда функции f(x) и g(x) непрерывны в точке a слева. Поскольку $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ →l при x→a-, для ε >0 существует b3=b3(ε)>0 такое, что при всех x принадлежащих I(b3)=(a-b3,a) имеем $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \varepsilon$. Положим b=min(b1 ,b2 ,b3). Тогда для каждого x принадлежит (a-b, b), используя теорему Коши, получим

$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| = \left|\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} - l\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - l\right| < \varepsilon$, где c принадлежит (x,a) непрерывна (a-b, a). Таким образом , по определению предела $\lim\limits_{x\to a-} \frac{f(x)}{g(x)}$=l что и требовалось доказать.

Второе правило Лопиталя (неопределённость вида ∞/∞ при x→a). Теорема 2. Пусть функции f(x) и g(x) определены и дифференцируемы в промежутке (a,b); g'(x)≠0 для всех x принадлежащих (a, b); f(x)→∞ и g(x)→∞ при x→a; существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, тогда $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. Функции $\frac{1}{f(x)}$ и $\frac{1}{g(x)}$ являются бесконечно малыми при x→a. Тогда по теореме 1 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\frac{g'(x)}{g(x)}}{\frac{f'(x)}{f(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \frac{g'(x)f(x)}{f'(x)g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)}$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Для раскрытия неопределённостей (00), (1∞), (∞0) пользуемся следующим приёмом:

находим предел (натурального) логарифма выражения, содержащего данную неопределённость. В результате вид неопределённости меняется. После нахождения предела от него берём экспоненту.

(00) = (e0ln0) = (e0(-∞)); (1∞) = (e∞ln1) = (e∞0); (∞0) = (e0ln∞) = (e0∞)

Пример 1. Возможно ли применение правила Лопиталя к пределу

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 sin\frac{1}{x}}{sinx}$?

Функции f(x) = $x^2 \sin\frac{1}{x}$ и g(x) =sinx, x∈ ℝ \ {0}, определены и епрерывны в окрестности точки x = 0 (исключая точку x = 0); их производные

f '(x)=2xsin$\frac{1}{x} - cos\,\frac{1}{x}$ и g '(x)=cosx

одновременно существуют при x≠ 0; выражение

$\left(f'(x)\right)^2 + \left(g'(x)\right)^2 = cos^2x + cos^2\frac{1}{x}$ -2xsin$\frac{2}{x} + 4x^2 sin^2\frac{1}{x}$ при x≠0 и $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2xsin\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x}}{cosx}$ (1).

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\left(2xsin\frac{1}{x}\right)(cosx)^{-1}$ = 0, а $\lim\limits_{x\to 0}\left(cos\frac{1}{x}\right)(cosx)^{-1}$ не существует, то предел (1) также не существует. Следовательно, применение правила Лопиталя в данном примере невозможно. Отметим, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 sin\frac{1}{x}}{sinx} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{sinx}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(xsin\frac{1}{x}\right)$ = 0.

Пример 2. Найти предел w = $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{cthx}$.

Неопределённость 1^∞ приводим к виду $e^{\frac{0}{0}}$, получаем

$\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{cthx} = e^{\left(ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)\right)(thx)^{-1}}$

и применяем правило Лопиталя имеем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}{thx} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+e^x}e^x\frac{1}{2}}{ch^{-2}x} = \frac{1}{2}$.

Таким образом, w = $e^{\frac{1}{2}}$.

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{x+1}(lnx+1)-x}{1-x}$

Функция f(x) = $x^{x+1}(\ln x + 1) - x$ и g(x) = 1-x, x>0, x≠1 удовлетворяют следующим условиям:

1) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x)$ = 0

2) их производные f'(x) = $x^{x+1}(\ln x + 1)(1+\frac{1}{x} + \ln x) + x^x$-1, g'(x) = -1

существуют при x >0.

3) существует $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ = -2

4) (f'(x))2 + (g'(x))2 ≠0 при x>0.

Следовательно, применимо первое правило Лопиталя, согласно которому имеем $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{x+1}(lnx+1)-x}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ = -2.

Пример 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x - x}{lnx - x + 1}$.

Функция f(x) = $x^x - x$ и g(x) = lnx-x+1, x>0, x≠1 удовлетворяют следующим условиям:

1) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0$

2)производные f'(x) = x^x(lnx+1) -1, g'(x) = $\frac{1}{x}$ -1 существует в достаточно малой окрестности точки x=1.

3) (f'(x))2 + (g'(x))2 ≠0, x≠1 в указанной окрестности.

4) согласно предыдущему примеру существует конечный предел.

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{x+1}(lnx+1)-x}{1-x}$ = -2.

Следовательно, применимо первое правило Лопиталя, и имеем

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{x+1}(lnx+1)-x}{1-x}$ = -2.

Пример 5. Найти предел матричной функции

$$A(x) = \begin{pmatrix} \left(\frac{sinx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} & \left(\frac{arctgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \\ \left(\frac{Arshx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} & \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}} \end{pmatrix}$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to a} A(x) = \left(\lim\limits_{x\to a} a_{ij}(x)\right)$, где $a_{ij}(x)$ элементы функциональной матрицы A(x), то вычисляем предел данной матрицы поэлементно. Имеем

$\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{sinx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^z$, где z = $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln\frac{sinx}{x}}{x^2}$. Применяем правило Лопиталя

z = $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{2xsinx} \cdot \frac{xcosx-sinx}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{xcosx-sinx}{2x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-xsinx}{6x^2} = -\frac{1}{6}$.

Аналогично получаем для всех других элементов:

$\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{arctgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^z$, z = $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln\frac{arctgx}{x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{arctgx} \cdot \frac{\frac{x}{1+x^2}-arctgx}{2x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-(1+x^2)arctgx}{2x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-2x\,arctgx}{6x^2} = -\frac{1}{3}$.

$\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{Arshx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^z$, z = $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln\frac{Arshx}{x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{Arshx} \cdot \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-Arshx}{2x^3} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-u(x)}{x^3} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0} \frac{Arshx}{3x^2} = -\frac{1}{6}$.

(Здесь введено обозначение u(x) = $\sqrt{1+x^2}$Arshx) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}} = e^z$, z = $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{1}{2}$.

Итак, окончательно имеем $\lim\limits_{x\to 0} A(x) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{6}} & e^{-\frac{1}{3}} \\ e^{-\frac{1}{6}} & e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$.

Пример 6. Найти z = $\lim\limits_{x\to 0} \frac{det\begin{pmatrix} x & sinx \\ e^x & 1+x^2 \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} xcosx & tgx \\ chx & e^x \end{pmatrix}}$.

Данные определители как функции переменной x удовлетворяют всем условиям правила Лопиталя в некоторой окрестности точки x=0. Поэтому, применяя правило, получаем

$$z = \lim_{x\to 0} \frac{det\begin{pmatrix} 1 & cosx \\ e^x-1 & 1+x^2\end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} x & sinx \\ e^x & 2x\end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} cosx-xsinx & cos^{-2}x \\ shx & e^x\end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} xcosx & tgx \\ chx & e^x\end{pmatrix}} = \frac{det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix}} = 1.$$

Пример 7. Найти асимптоту кривой $y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$, $x > 0$.

Уравнение наклонной асимптоты имеет вид y = kx+b. Использовав уравнение кривой, находим k и b:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^x}{(1+x)^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e},$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{x}{e}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e^2} \lim_{x\to+\infty} x\left(e - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) = \frac{1}{e^2} \lim_{x\to+0} \left(\frac{e-(1+t)^{\frac{1}{t}}}{t}\right) =$$

$$\frac{1}{e^2} \lim_{x\to+0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \left(\frac{1}{t(t+1)} - \frac{1}{t^2} ln(1+t)\right) =$$

$$= -\frac{1}{e^2} \lim_{x\to+0} \frac{t-(1+t)ln(1+t)}{t^2(1+t)} = -\frac{1}{e^2} \lim_{x\to+0} \frac{-ln(1+t)}{2t-3t^2} = \frac{1}{2e}.$$

Таким образом, получаем уравнение асимптоты $y = \frac{x}{e} + \frac{1}{2e}$.

Пример 8. Исследовать на дифференцируемость в точке в точке x=0 функцию f(x)

$$= \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}, & \text{если } x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Исследовать на дифференцируемость функции в точке x=0 означает установить существование конечного предела $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{2}}{x}$. (1).

Предел (1) будем искать по правилу Лопиталя, для чего мы должны убедиться, что числитель в (1) стремится к нулю при x→0. Проверка с применением правила Лопиталя показывает, что

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{2e^x-2-x-xe^x}{2x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-xe^x}{2(e^x(1+x)-1)} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{-xe^x}{2e^x+xe^x} = 0.$$

Итак, в формуле (1) имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Применяем к (1) правило Лопиталя трижды, получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^x-2-x-xe^x}{2x^2(e^x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-e^x-xe^x}{4x(e^x-1)+2x^2e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{-xe^x}{4(e^x-1)+e^x(8x+2x^2)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-e^x(x+1)}{(12+12x++2x^2)e^x} = -\frac{1}{12}. \qquad f'(0) = -\frac{1}{12}.$$

Пример 9. $w = \lim_{x\to+\infty} \left(\left(tg\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}, \left(\frac{2}{\pi} arctgx\right)^x, (thx)^x\right)$.

Для нахождения предела вектор – функции вычисляем пределы каждой из её компонент. Поскольку компоненты представляют собой степенно – показательные выражения, то применяем представление $u^v = e^{vlnu}$, $u > 0$, и, приведя соответствующие неопределённости к виду пользуемся правилом Лопиталя. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \left(tg\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \left(tg\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{-1} cos^{-1}\frac{\pi x}{2x+1} \cdot \frac{\pi}{(2x+1)^2}} = \quad = e^{2\pi \lim_{x\to+\infty} \left(sin\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{-1} (2x+1)^{-2}} =$$

$e^{2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2x+1}}{\sin\left(\frac{\pi}{(2x+1)}\right)}\alpha}$ =1 ,

$$\alpha = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x+1} = 0\,.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\,arctgx\right)^{x}$=$e^{\lim\limits_{x\to+\infty}xln\left(\frac{2}{\pi}arctgx\right)} = e^{z}$, z = $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{arctgx}}{-\frac{1}{x^2}}$ = -$\frac{2}{\pi}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(thx)^{x}$ = $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{xln(thx)} = e^{z}$, z = $\lim\limits_{x\to+\infty}xln(thx)$ = $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{thx}\cdot\frac{1}{ch^2}}{-\frac{1}{x^2}}$ = - 2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{ch2x}$ = 0.

Следовательно, w = $\left(1\,,\ e^{-\frac{2}{\pi}}\,,1\right)$.

Пример 10. w = $\lim\limits_{x\to+0}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}x^{-100}, x^{x^x-1}\right)$.

Поскольку для вектор – функции

w = $\lim\limits_{x\to+0}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}x^{-100}, x^{x^x-1}\right) = \left(\lim\limits_{x\to+0}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}x^{-100}\right), \lim\limits_{x\to+0}\left(x^{x^x-1}\right)\right)$,

то находим пределы каждой из компонент в отдельности. Имеем

$\lim\limits_{x\to+0}e^{-\frac{1}{x^2}}x^{-100} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y^{50}}{e^y} = 50!$ $\qquad\lim\limits_{y\to+\infty}e^{-y} = 0.$

(здесь второе правило Лопиталя применено 50 раз).

Для второй компоненты предварительно применяем представление u^v=e^{vlnu}, u > 0, и проводим некоторое преобразование с тем, чтобы можно было воспользоваться правилом Лопиталя:

$\lim\limits_{x\to+0}\left(x^{x^x-1}\right) = \lim\limits_{x\to+0}e^{xln^2x\left(\frac{e^{xlnx}-1}{xlnx}\right)}$=$e^{ab}$.

(Здесь мы воспользовались непрерывностью функции x→ e^x и теоремой о пределе произведения). Для нахождения a = $\lim\limits_{x\to+0}(xln^2x) = \lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{ln^2x}{x^{-1}}\right)$ применяем второе, а для нахождения b = $\lim\limits_{x\to+0}\frac{e^{xlnx}-1}{xlnx}$ первое правило Лопиталя. Имеем

$\lim\limits_{x\to+0}\frac{ln^2x}{x^{-1}} = \lim\limits_{x\to+0}\frac{2lnx\cdot\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim\limits_{x\to+0}\frac{-2lnx}{x^{-1}} = \lim\limits_{x\to+0}\frac{-\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$

$\lim\limits_{x\to+0}\frac{e^{xlnx}-1}{xlnx} = \lim\limits_{x\to+0}\frac{e^{t}-1}{t} = 1.$

Поэтому окончательно w = (0 ,1).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Правило Лопиталя часто (хотя не всегда) позволяет раскрывать неопределённости вида 0/0 или ∞/∞ без особых раздумий – если после первого дифференцирования снова получили неопределённость, не беда – можно продифференцировать ещё раз, и так пока не получим какой-нибудь конкретный предел.

Использованная литература:

1. Архипов Г.И, Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу, Москва, 1999;
2. Матвеева Т.А., Рыжкова Н.Г., Математический анализ, Екатеринбург, 2017.
3. Демидович Б.П., Кудряцев В.А., Краткий курс высшей математики, Москва 1975.
4. Темиргалиев Н., Введение в математический анализ, Астана, 2015.
5. Самочернова Л.И., Высшая математика, Томск, 2005.