MATEMATIK ANALIZDAGI AYRIM QARSHI MISOLLAR HAQIDA

Boboxo'jaeva Nazokat Shodmon qizi

Buxoro davlat universiteti Fizika-matematika fakul'teti talabasi

https://doi.org/10.5281/zenodo.6590770

ANNOTASIYA: Maqolada qarshi misollar haqida umumlashgan ma'lumotlar keltirilgan**.** Evklidning arifmetikaning asosiy teoremasining isboti minimal qarshi misoldan foydalanadigan oddiy isbot ekanligi to'g'risida mulohazalar bildirilgan. Monoton ketma-ketliklarning limiti haqidagi Veyershtrass teoremasi, funksiya limiti, limit teoremalarida hamda chekli sondagi cheksiz kichik funksiyalarning yig'indisi haqida qarshi misollar bayon qilingan va misollar yordamida tushuntirilgan.

Kalit so'zlar: to'rtburchaklar, gipoteza, matematik analiz, Seyfert gipotezasini inkor qilish, Polya gipotezasi, o'lcham, sonlar ketma-ketligi,cheksiz kichik ketma-ketlik, monoton ketma-ketlik, yaqinlashuvchi ketma-ketlik, haqiqiy sonlar, funksiya limiti.

ANNOTATION: The article provides generalized information about counterexamples. It has been argued that the proof of the basic theorem of arithmetic is a simple proof using a minimal counterexample. The Weierstrass theorem on the limit of monotone sequences, limit of functions, the limit theorems, the sum of infinite functions in a finite numbers are explained by examples.

Keywords: rectangles, hypothesis, mathematical analysis, rejection of Seyfert hypothesis, Polya hypothesis, size, sequences of real numbers, infinite series, monotone sequences, convergent subsequences, real numbers, limits of function.

Qarshi misol biror g'oya yoki nazariyaga qarshi yoki zid bo'lgan misoldir. Qarshi misollarni - umumiy qilib aytganda, matematikadagi har qanday istisnolar deb aytishimiz mumkin. Matematikada ko'pincha biror gipotezaning bir qismi bajarilmaydigan yoki teorema xulosasi o'rinli bo'lmagan holatlar qaralganda yuzaga keladigan masalalar qarshi misollar deyiladi. Yoki aksincha, ba'zan teoremalar yoki mulohazalar yolg'on ekanligini isbotlash uchun ham qarshi misollardan foydalanishimiz mumkin. Masalan, A: «Nargiza- a'lochi talaba emas» degan mulohaza berilgan bo'lsin. Bu mulohaza «Barcha talabalar a'lochi» mulohazasiga qarshi misol bo'ladi. Ya'ni qarshi misollar mantiqda umumlashtirishni inkor etadi, yoki ba'zi taxminlar yolg'on ekanligini ko'rsatishda yordam beradi.

Misol.«Barcha tub sonlar toq sonlardir» iborasiga qarshi misol 2 raqamidir, chunki, u tub son, lekin toq son emas. 7 yoki 10 raqamlarining hech biri qarshi misol emas, chunki ularning hech biri bayonotga zid bo'lish uchun yetarli emas. Ushbu misolda 2 aslida fikrga qarama-qarshi bo'lishi mumkin bo'lgan yagona misoldir, garchi buning o'zi bayonotga zid bo'lsa ham. Shunga o'xshash, «Barcha natural sonlar tub yoki juftdir» iborasida 1 raqami qarshi misol sifatida beriladi, chunki 1soni tub ham juft ham emas.

Matematikada qarshi misollar nafaqat o'qituvchi-matematik tadqiqotchilar va balki o'quvchi-talabalar uchun dastak sifatida xizmat qiladi hamda o'quv tizimini sifatliroq bo'lishida va kuchaytirishda samarali vosita hisoblanadi. Bundan tashqari, hamisha aytib o'tiladigan an'analardan chetga chiqishga yordam beradi va eng asosiysi bu orqali pedagoglar o'quv jarayonida yuzaga keladigan «nozik»savollarga sifatli javob berish, isbotlanadigan teorema, qoida, tushuncha va farazlarni chuqurroq o'rganish, tahlil qilish, isbotlash, amalda kengroq qo'llash, o'zgarishlarni o'rganish va misollarni mohiyatan kengroq tushunish, anglashda keng xizmat qilishlarida yordam bera oladi va bu orqali tarbiyalab kelinayotgan yosh kadrlarning salohiyati ham yuksalishi shak-shubha yo'q. Ba'zan, hattoki, «Matematika taraqqiyoti, birinchi navbatda, teorema va qarshi misollar topishdan iborat»- ham deyilishi bejiz emas.

Matematikada son-sanoqsiz masala va misollar bor. Bizga qarshi misollar masalalardagi mohiyatni anglashda, uning ma'nosini tushunishda yordam beradi va haqiqatlarni namoyon qilishda xizmat qiladi; noto'g'ri tasdiqni rad etuvchi qarshi misollar esa isbotlovchi kuchga ega bo'lib, ular birgalikda yuqori samaradorlik hosil qila oladi. Masalan, oddiy misollar murakkab masalalarni tushunishga olib keladi,-bu haqiqat; oddiy qarama-qarshi misol esa ahamiyatsiz bo'lmagan mulohaza, faraz va noto'g'ri tushunchalarni rad etishi yoki ularning ahamiyatini yanada oshirib berishga xizmat qilishi mumkin.

To'rtburchaklar misoli: aytaylik, bir matematik geometriya va shakllarni o'rganyapti va ular haqidagi ma'lum teoremalarni isbotlamoqchi va u «Barcha to'rtburchaklar kvadratdir» taxminini qildi va bu bayonotning to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligiga qiziqyapti. Bunday holda, deduktiv mulohazalardan foydalanib, haqiqatni isbotlashga urinishimiz yoki agar bu noto'g'ri ekanligiga shubha qilsak, unga qarshi misol topishga harakat qilishimiz mumkin. Ikkinchi usulda, qarshi misol bu kvadrat bo'lmagan to'rtburchaklar bo'ladi, masalan, tomonlarining birining uzunligi 8 sm, ikkinchisining uzunligi 10 sm bo'lgan to'rtburchak. Deylik, matematik shunda ham to'xtamadi, ya'ni endi kvadrat bo'lmagan to'rtburchaklar topilganiga qaramay, topilgan to'rtburchakning to'rt tomoni bor edi, demak «Barcha to'rtburchaklarning to'rt tomoni bor» degan yangi taxminni aytdi. Endi bu taxmin dastlabkisidan mantiqan zaifroq hisoblanadi, chunki har bir kvadratning to'rt tomoni bor, lekin har bir to'rt tomonlama shakl kvadrat emas.

Yuqoridagi misol matematik o'z taxminini qarshi misollar oldida qanday zaiflashtirishi mumkinligini soddalashtirilgan tarzda tushuntirdi, ammo qarshi misollar ma'lum taxminlar va gipotezalarning zaruriyligini ko'rsatish uchun ham ishlatilishi mumkin. Misol uchun, deylik bir muncha vaqt o'tgach, bizning yuqoridagi qiziquvchan matematigimiz «To'rtburchak bo'lgan va to'rt tomoni teng uzunlikdagi barcha shakllar kvadratdir»- degan yangi faraz haqida taxmin qildi, deylik. Bu faraz gipotezaning ikki qismidan iborat, ya'ni shakl «to'rtburchak» bo'lishi va «bir xil uzunlikdagi to'rt tomoni» bo'lishi kerak. Matematik, qarshi misollar har qanday taxminni yo'q qila oladimi yoki yo'qligini bilishni xohlaydi va hali ham o'z taxminining haqiqatini saqlab qoladi.

Bu shuni anglatadiki, u quyidagi ikkita bayonotning haqiqatini tekshirishi kerak: «To'rtburchaklar bo'lgan barcha shakllar kvadratdir» faraziga qarama-qarshi misol yuqorida berilgan edi, «To'rt tomoni teng uzunlikdagi barcha shakllar kvadratdir» mulohazasiga qarshi misol kvadrat bo'lmagan rombdir. Shunday qilib, matematik endi ikkala taxmin haqiqatan ham zarur ekanligini biladi.

Qarshi misollar matematik analizning har bir bo'limida talaygina bo'lib, masalan, ta'rif, lemma, qoidalar uchun, funksiya, hosila, integral mavzulari uchun ham keng tatbiqda tarqalgan. Biroq, biz bunday misollardan, odatda, yetarli darajada foydalana olmaymiz va misollarni ham ko'pincha topilishi qiyinroq bo'lgan kitoblar yoki jurnallar, maqolalarda uchratishimiz mumkin bo'ladi. Ammo, aytib o'tish kerak, hammaga ma'lum va mashhur, keng tarqalgan Veyershtrass va den Vaerden misoli bundan mustasno bo'lib, bu misol hosila tushunchasi bilan tanishib o'tilgandan so'ng darhol qarshi misol sifatida ko'rsatilishi mumkin bo'ladi, ya'ni funksiya aniqlanish sohasining ixtiyoriy nuqtasida uzluksiz, ammo hosilaga ega emasligi aytilib, uning grafigi ham ko'rsatiladi. Bunga boshqa misollar: Seyfert gipotezasini inkor qilish, Polya gipotezasi, Gilbertning o'n to'rtinchi muammo gipotezasi, Tait gipotezasi va Ganea gipotezasini keltirish mumkin.

Matematikada minimal qarshi misollar bu bayon etilgan da'voning rost emasligini ko'rsatuvchi eng kichik misollar bo'lib, minimal qarshi misol yordamida isbotlash - bu minimal qarshi misoldan induksiya va qarama-qarshilik bilan isbotlash g'oyalarini birlashtirgan holda isbotlash usuli. Aniqroq qilib aytadigan bo'lsak, P mulohazani isbotlashga urinishda, avvalo, qarama-qarshilik yo'li bilan uning noto'g'ri ekanligi va shuning uchun kamida bitta qarshi misol bo'lishi kerak deb taxmin qilinadi. Ba'zi o'lcham g'oyasiga (uni diqqat bilan tanlash kerak bo'lishi mumkin) kelsak, u minimal qarshi misoli bor degan xulosaga kelinadi. Argumentga kelsak, C umuman taxminiy narsadir (chunki P ning haqiqati C ning imkoniyatini istisno qiladi), lekin agar C mavjud bo'lsa, u qandaydir mulohazalarni qo'llaganidan keyin qandaydir aniq xususiyatlarga ega bo'lar edi, deb bahslashish mumkin. Induktiv isbotdagiga o'xshab, qarama-qarshilikka olib keladi va bu bilan P mulohazaning haqiqatdan ham to'g'ri ekanligini ko'rsatadi.

Agar biz qarama-qarshilikning shakli minimallikning ishchi gipotezasi ma'nosida C dan kichikroq bo'lgan boshqa qarama-qarshi D misolini olishimiz mumkin bo'lsa, unda bu usul an'anaviy ravishda cheksiz kelib chiqishi bilan isbot deb ataladi. Agar qarama-qarshi misol bo'lsa, minimal qarshi misol mavjud degan taxmin qandaydir asosli tartibga asoslanadi. Natural sonlar bo'yicha odatiy tartib matematik induksiyaning eng oddiy formulasi bilan aniqlanishi mumkin; lekin usulning ko'lami har qanday turdagi tartiblangan induksiyani o'z ichiga olishi mumkin.

Minimal qarshi misol usuli chekli oddiy guruhlarni tasniflashda ko'p qo'llaniladi. Arifmetikaning asosiy teoremasining isboti minimal qarshi misoldan foydalanadigan oddiy isbotdir.

Ketma-ketliklarda qarshi misollar

Dastlab, matematik analizning asosiy tushunchalaridan biri bo'lmish ketma-ketlik mavzusida qarshi misollarni ko'rib chiqamiz. Bunda asosiy tushuncha va teoremalarni isbotsiz keltiramiz, chunki bizning asosiy maqsadimiz qarshi misollar tuzish va mavjud qarshi misollarni izohlashdan iborat.

Sonlar ketma-ketligi va uning limiti

Faraz qilaylik, f har bir natural $n \in N$ soniga biror haqiqiy $x_n \in R$ sonni mos qo'yuvchi akslantirish bo'lsin: $: n \to x_n$. Bu akslantirish hadlaridan tuzilgan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ ifoda haqiqiy sonlar (yoki qisqacha sonlar) ketma-ketligi deyiladi va $\{x_n\}$ kabi belgilanadi.

Ta'rif. Agar shunday o'zgarmas $M > 0$ son mavjud bo'lsaki, $\forall n > N$ uchun $|x_n| \leq M$ bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan deyiladi.

Ta'rif. a soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi, agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun $\exists N$ nomer topilsaki, $\forall n > N$ lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa.

Teorema. Har qanday chegaralangan ketma-ketlik kamida bitta limit nuqtaga ega. Chekli limitga ega bo'lgan ketma-ketlik chegaralangandir.

Chegaralangan ketma-ketlikning limiti bor deyish har doim o'rinli emasligini quyidagi qarshi misol bilan yaqqol ko'ra olamiz:

$x_n = (-1)^n$ ketma-ketlik chegaralangan, chunki $|x_n| \leq 1$ o'rinli, lekin vaholanki, limitga ega emas.

Ta'rif. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik deyiladi.

Teorema. Chekli sonli cheksiz kichik ketma-ketliklarning algebraik yig'indisi ham cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

Qarshi misol. Cheksiz sondagi cheksiz kichik ketma-ketliklarning yig'indisi. Bunda cheksiz kichik ketma-ketliklarning chekli bo'lish talabi ularning cheksiz kichik yig'indisi uchun zarur emasligini ko'rish mumkin.

Misol. $\alpha_k = \frac{1}{n3^k}$ (bunda $n = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots$) ketma-ketlikning yig'indisi

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n3^k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1/3}{1 - 1/3} = \frac{1}{2n}$$

ham cheksiz kichik ketma-ketlikdir.

Teorema. Cheksiz kichik ketma-ketlik α_n va chegaralangan x_n sonli ketma-ketlikning ko'paytmasidan tuzilgan $\{\alpha_n x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlikdir.

Qarshi misol. Chegaralanmagan va cheksiz kichik ketma-ketlikning ko'paytmasidan tuzilgan cheksiz kichik ketma-ketlik. Bunda $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaranmagan bo'lsada, cheksiz kichik ketma-ketlik hosil bo'lishini ko'ramiz:

Misol. $x_n = n, \alpha_n = \frac{1}{n^2}$ berilgan bo'lsin. Ma'lumki, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralanmagan, ammo $\{\alpha_n x_n\}$ ko'paytmadan tuzilgan ketma-ketlik $\alpha_n x_n = \frac{1}{n}$ cheksiz kichik ketma-ketlikdir.

Aksincha, chegaralanmagan va cheksiz kichik ketma-ketlikning ko'paytmasining cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lmasligini ko'ramiz.

Misol. $\{x_n\} = n^2$, $\alpha_n = \frac{1}{n}$ ketma-ketliklar berilgan. Ma'lumki, $\{x_n\}$ chegaralanmagan va $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik, ularning ko'paytmasidan tuzilgan ketma-ketlik $\alpha_n x_n = n$ esa chegaralanmagan.

Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ hamda $\{y_n\}$ketma-ketliklar berilgan bo'lsin:

$$\{x_n\}:\ x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots,\, x_n, \ldots$$
$$\{y_n\}:\ y_1,\, y_2,\, y_3,\, \ldots, y_n, \ldots$$

Quyidagi

$$x_1 + y_1,\quad x_2 + y_2,\quad x_3 + y_3,\ \ldots,\quad x_n + y_n, \ldots$$

$$x_1 - y_1,\quad x_2 - y_2,\quad x_3 - y_3,\ \ldots,\quad x_n - y_n, \ldots$$

$$x_1 \cdot y_1,\quad x_2 \cdot y_2,\quad x_3 \cdot y_3, \ldots, x_n \cdot y_n, \ldots$$

$$\frac{x_1}{y_1},\ \frac{x_2}{y_2},\ \frac{x_3}{y_3},\ \ldots,\ \frac{x_n}{y_n},\ \ldots \qquad (y_n \neq 0,\quad n = 1, 2, 3,\ \ldots)$$

ketma-ketliklar mos ravishda $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbati deyiladi va

$$\{x_n + y_n\},\quad \{x_n - y_n\},\quad \{x_n \cdot y_n\},\quad \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$$

kabi belgilanadi.

<u>Teorema.</u> Aytaylik, $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar berilgan bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b,\qquad (a \in R,\quad b \in R)$$

bo'lsin. U holda $n \to \infty$ da $(c \cdot x_n) \to c \cdot a$;

$$x_n + y_n \to a + b;\qquad x_n \cdot y_n \to ab;\qquad \frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}\ (b = 0),$$

ya'ni

a) $\forall c \in R$ da $\lim_{n\to\infty}(c \cdot x_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n$;

b) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$;

d) $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$;

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$, $(b \neq 0)$

bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan teoremaga ham bir qancha qarshi misollar tuzish mumkin. Shulardan eng soddalaridan birini ko'ramiz:

Misol. Chegaralangan, ammo limitga ega bo'lmagan $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$ ketma-ketliklar berilgan bo'lsin. Ketma-ketliklar limitga ega emas, lekin ularning yig'indisi nol limitga ega. Ko'paytmasi va bo'linmasi ham -1 limitga egadir.

Teorema (Monoton ketma-ketliklarning limiti haqidagi Veyershtrass teoremasi) Agar monoton o'suvchi ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo'lsa, uning chekli limiti mavjud, ya'ni $x_n \leq M, M = const$. Agar yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, u holda limit $+\infty$ ga teng bo'ladi. Xuddi shunday, berilgan ketma-ketlik monoton kamayuvchi bo'lib, quyidan chegaralangan bo'lsa, ketma-ketlik chekli limitga ega bo'ladi, aks holda uning limiti $-\infty$ ga teng bo'ladi.

Qarshi misol. Bizga $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ chegaralangan ketma-ketlik berilgan bo'lsin, $|x_n| \leq 1$. Ketma-ketlikning limiti $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ mavjud va chekli. Vaholanki, ketma-ketlik monoton emas.

Teorema (Bolsano-Veyershtrass). Ixtiyoriy chegaralangan ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi (chekli limitga ega) qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin.

Agar ketma-ketlikning chegaralanganlik shartini olib tashlasak, u holda chekli limitga ega qismiy ketma-ketlik mavjud bo'lmasligi mumkin.

Qarshi misol. Chegaralanmagan $-1, 2, -3, \dots, (-1)^n n, \dots$ ketma-ketlik berilgan va bundan chekli limitga ega qismiy ketma-ketliklar tuzish mumkin emas.

Biroq, chegaralanmagan ketma-ketliklar mavjud bo'lib, ular chekli limitlarga ega bo'lgan qismiy ketma-ketliklar ham mavjud.

Misol. Chegaralanmagan va chekli limitga ega qismiy ketma-ketliklar tuzish mumkin bo'lgan ketma-ketlikni qaraymiz: $1, \frac{1}{1}, 2, \frac{1}{2}, 3, \dots, n, \frac{1}{n}, \dots$ ketma-ketlik chegaralanmagan, ammo chekli limitga ega, aniqrog'i limiti nolga teng bo'lgan qismiy ketma-ketlik ajratishimiz mumkin.

Yuqorida ta'kidlaganidek, qarshi misollar juda ko'p va ular bizga keng miqyosda xizmat qila oladi. Ketma-ketlik va uning limiti haqidagi ko'rilgan bir qancha qarshi misollar teorema va tasdiqlarni yaxshiroq tushunishga xizmat qiladi.

Aytish joizki, keltirilgan barcha teoremalar va qarshi misollar [2-36] maqolalarda keng qo'llanilgan.

Maqolada matematik analiz kursidagi qarama-qarshi misollar ko'rib chiqldi va tahlil qilindi. Soha yangi misollar bilan boyitildi. Uni amalga oshirish jarayonida bir nechta teorema va masalalar ko'rib chiqildi, ular qarshi misollar yordamida isbotlandi. Asosiy masala shundaki, ba'zi savollarga yetarli tajribaga ega bo'lmasdan, osongina noto'g'ri javob berish yoki muammoning asl mohiyatini noto'g'ri taqdim etish mumkin. Taqdim qilingan bilimlarga asoslanib esa savollarga to'g'ri javob topish mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR (REFERENCES)

1. Гелльбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. Москва, Мир, 1967 г., 248 с.

2. Расулов Х.Р. Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида // Аниқ фанларни касбга йуналтириб ўқитиш муаммолари ва ечимлари, Республика илмий-амалий конференция материаллари тўплами, 2018, Навоий, 14-15 б.

3. Расулов Х.Р. Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги тенглама учун нолокал масала ҳақида // Аниқ фанларни касбга йуналтириб ўқитиш муаммолари ва ечимлари, Республика илмий-амалий конференция материаллари тўплами, 2018, Навоий, 17-18 б.

4. Расулов Х.Р. Об одной краевой задаче со смещением для линейного уравнения гиперболического типа // Академик Тошмухаммад Ниёзович Кори-Ниёзийнинг хаёти ва ижоди, чет эл олимлари иштирокида илмий-амалий конференция тезислари тўплами, Тошкент, 2017, 84-85 б.

5. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega elliptik tenglama uchun chegaraviy masalaning yechimi haqida // Models and methods for increasing the efficiency of innovative research, Germany, 10 (2022), p. 184-186.

6. Rasulov X.R. Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type // Modern problems of applied mathematics and information technologies Al-Khwarizmi 2021, Fergana, Uzbekistan, p. 149.

7. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.

8. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.

9. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.

10. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.

11. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Модуль қатнашган баъзи тенглама, тенгсизлик ва тенгламалар системаларини ечиш йўллари // Science and Education, scientific journal, 2:9 (2021), p.7-20.

12. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим рационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p. 586-595.

13. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим иррационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.596-607.

14. Rasulov X.R. Sayfullayeva Sh.Sh. Buzilish chizig’iga ega bo’lgan elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo’yiladigan chegaraviy masalalar haqida // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.46-54.

15. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.

16. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Задача типа задач Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Scientific progress, 2:1 (2021), p.42-48.

17. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.23-26.

18. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.

19. Расулов Х.Р. Об одной краевой задаче для уравнения гиперболического типа // «Комплексный анализ, математическая Физика и нелинейные уравнения» Международная научная конференция Сборник тезисов Башкортостан РФ (оз. Банное, 18 – 22 марта 2019 г.), с.65-66.

20. Rasulov X.R. (2020). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration // Uzbek Mathematical Journal, №3, pp.117-125.

21. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.

22. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.

23. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяциянинг динамикаси ҳақида // Scientific progress, 2:1 (2021), p.665-672.

24. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. Ayrim dinamik sistemalarning tahlili haqida // Scientific progress, 2:1 (2021), p.448-454.

25. Rasulov H. Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration // Центр научных публикаций (buxdu. uz) 5:5 (2021).

26. Rasulov Kh.R., Sobirov S.Zh. A problem of the Gellerstedt type for one mixed-type equation with two lines of degeneration // Scientific progress, 2:1 (2021), p. 42-48.

27. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.

28. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.27-30.

29. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.

30. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.

31. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с. 19-22.

32. Х.Р Расулов, Ф.М. Джуракулова (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида // Scientific progress. 2:1, 455-462 бетлар.

33. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. О существовании обобщенного решения краевой задачи для нелинейного уравнения смешанного типа // Вестник науки и образования, 97:19-1 (2020), С. 6-9.

34. Расулов Х.Р. Краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения // Бухара, «Дурдона», 2020 г., 96 с.

35. Rasulov Kh.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Analysis of Some Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations with Two Lines of Degeneracy // Irish Interdisciplinary Journal of Science & Research (IIJSR), 6:2 (2022), p. 8-14.

36. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega giperbolik tipdagi tenglama uchun Koshi masalasi haqida // «Zamonaviy ta'lim tizimini rivojlantirish va unga qaratilgan kreativ g'oyalar, takliflar va yechimlar», 35-sonli Respublika ilmiy-amaliy on-line konferensiyasi, 2022, 192-195 b.