Yosh Tadqiqotchi Jurnali Vol. 1 No. 1 (2022)


"YOSH TADQIQOTCHI" ilmiy elektron jurnali

Vebsayt: http://2ndsun.uz/index.php/yt

# ЧЕГИРМАЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАРНИ ҲИСОБЛАШГА ТАТБИҚИ

**Ҳусан Норжигитов[1] Дилмуроджон Туйчиевич Яҳёев[2]**
*Гулистон давлат университети доценти, ф-м.ф.н.[1]*
*Гулистон давлат университети магистри[2]*

ИНФО:

Қабул қилинди: 01.02.2022
Кўриб чиқилди: 13.02.2022
Нашр қилинди: 14.2.2022

***Калит сўзлар:***
Дирихле интеграли,
Пуассон интеграли,
Лаплас интеграллари,
Френелли интеграллари,
Лежандр интеграли,
махсус нуқта, чегирма.

АННОТАЦИЯ

Ушбу мақолада жуда кўп соҳаларда муҳим ҳисобланган, ҳисоблаш мураккаб бўлган айрим хосмас интеграллар: Дирихле интеграли, Пуассон интеграли, Лаплас интеграллари, Френелли интеграллари, Лежандр интегралининг қийматларини чегирмалардан фойдаланган ҳолда ҳисобланилган



**Кириш**

Маълумки, математик анализ курсидаги баъзи хосмас интегралларнинг қийматларини оддий усулларда ҳисоблаш бирмунча қийинчиликлар туғдириши мумкин. Аммо, чегирмалардан фойдаланган ҳолда бу интегралларнинг қийматларини осон ҳисоблаш мумкин. Ушбу ишда айрим ҳисоблаш мураккаб бўлган хосмас интегралларнинг қийматлари чегирмалар назариясидан фойдаланган ҳолда ҳисоблаб келтирилган. Бундан кўзланган асосий мақсад баъзи ҳисоблаш мураккаб бўлган интегралларнинг қийматларини чегирмалардан фойдаланган ҳолда ҳисоблаш ва интегралларни ҳисоблашда қулайлик туғдирадиган йўлларни ҳамда чегирмалар назарияси ва унинг татбиқларини ўрганиш, улардан амалиётда фойдалана олиш кўникма ва малакасини шакллантириш.

Адабиётлар таҳлили ва методологияси

Ҳозирги вақтда чегирмалар назарияси математиканинг турли бўлимларида қўлланилмоқда [3]. чегирмалар назарияси ҳақидаги батафсил ва систематик тартибли маълумотлар [1] ва [2] адабиётларда келтирилган. Мазкур иш учун чегирмалар назарияси татбиқларини ўрганиш методологик асос бўлади.

**Натижалар**

$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$ **кўринишдаги хосмас интегралларни ҳисоблаш.**

Айтайлик, $x$ ўзгарувчининг рационал функцияси бўлган $R(x)$

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

бўлиб, бунда $P(x)$ ва $Q(x)$ лар мос равишда $n$ ва $m$ даражали кўпҳадлар, ва $m-n \geq 2$ бўлсин. $R(x)$ функция ҳақиқий ўқда қутб нуқтага эга бўлмасин.

Маркази координаталар бошида радиуси $R$ бўлган айлананинг юқори ярим текисликдаги қисми $C$ ҳамда ҳақиқий ўқнинг $[-R, R]$ кесмасидан ташкил топган $\gamma_R$ ёпиқ эгри чизиқни оламиз. (3-чизма)

Равшанки,

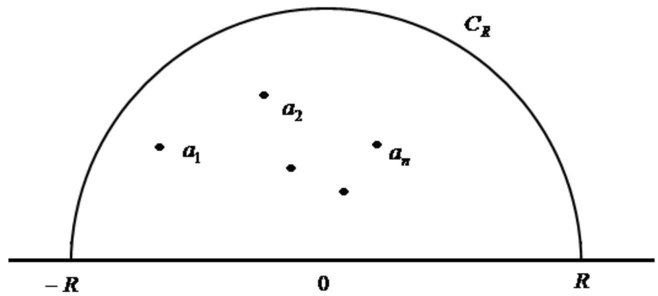
$$\gamma_R = [-R, R] \cup C.$$

Сўнг

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

рационал функцияни қараймиз.

Энди $R$ радиусни шундай катта қилиб оламизки, $R(z)$ функциянинг барча юқори ярим текисликдаги махсус нуқталари шу $\gamma_R$ ёпиқ эгри чизиқ ичида жойлашсин.




3-чизма.

Чегирмалар ҳақидаги теоремага кўра [1]

$$\int_{\gamma_R} R(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \underset{z=z_k}{res} R(z) \qquad (1)$$

бўлади. Бу ерда $z_1, z_2, \dots, z_p$ лар $R(z)$ функциянинг $\gamma_R$ ёпиқ эгри чизиқ ичидаги махсус нуқталари (қутб нуқталари).

Равшанки,

$$\int_{\gamma_R} R(z)dz = \int_{-R}^{R} R(x)dx + \int_{C} R(z)dz \qquad (2)$$

бўлади. Чегирмалар ҳақидаги теоремага [1] асосан ва интеграл хоссасидан

$$\int_{-R}^{R} R(x)dx + \int_{C} R(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \underset{z=z_k}{res} R(z) \qquad (3)$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенгликдаги

$$\int_{C} R(z)dz$$

интегрални баҳолаймиз.

Агар

$$|R(z)| = \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| = \left|\frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}\right| =$$

$$=\left|\frac{a_n z^n}{b_m z^m}\left[\frac{1+\frac{a_{n-1}}{a_n z}+\ldots+\frac{a_1}{a_n z^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n z^n}}{1+\frac{b_{m-1}}{b_m z}+\ldots+\frac{b_1}{b_m z^{m-1}}+\frac{b_0}{b_m z^m}}\right]\right|=\left|\frac{a_n}{b_m z^{m-n}}\right|\cdot\left|\frac{1+\frac{a_{n-1}}{a_n z}+\ldots+\frac{a_1}{a_n z^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n z^n}}{1+\frac{b_{m-1}}{b_m z}+\ldots+\frac{b_1}{b_m z^{m-1}}+\frac{b_0}{b_m z^m}}\right|$$

ҳамда $m-n\geq 2$ бўлишини эътиборга олсак, унда $R$ нинг етарлича катта қийматларда

$$|R(z)|<\frac{K}{R^2} \qquad (K=const)$$

бўлишини топамиз. Натижада

$$\int_C |R(z)|dz<\frac{K}{R^2}\pi R=\frac{K\pi}{R}$$

бўлади. Бундан (3) муносабатда

$$\lim_{R\to\infty}\int_C R(z)dz=0$$

бўлиши келиб чиқади.

Юқоридаги тенгликдан $R\to\infty$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{p}\underset{z=z_k}{res}\,R(z). \qquad (4)$$

Демак, $R(z)$ функция юқорида айтилган шартларни қаноатлантирса, унда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$$

интеграл $R(z)$ функциянинг юқори ярим текисликдаги барча махсус нуқталаридаги чегирмалар йиғиндисини $2\pi i$ га кўпайтирилганига тенг экан [2]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx=2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_k\geq 0}\underset{z=z_k}{res}\,R(z).$$

**1-мисол.** Ушбу

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

интегрални ҳисобланг.

Равшанки,

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$$

функция учун $z = i$ нуқта юқори ярим текисликда жойлашган иккинчи тартибли қутб нуқта бўлади. Демак,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} \frac{1}{(z^2+1)^2}.$$

Энди функциянинг чегирмасини ҳисоблаймиз:

$$\operatorname*{res}_{z=1} \frac{1}{(z^2+1)^2} = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[\frac{(z-i)^2}{(z^2+1)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z^2+i)^2}\right] = \lim_{z\to i} \frac{-2}{(z+i)^3} = -\frac{2}{8i^3} = -\frac{1}{4}i.$$

Шундай қилиб,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i\left(-\frac{1}{4}i\right) = \frac{\pi}{2}$$

бўлади.

**2-мисол.** Ушбу $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+a^2}$ Лаплас интегралини ҳисоблаш учун биз

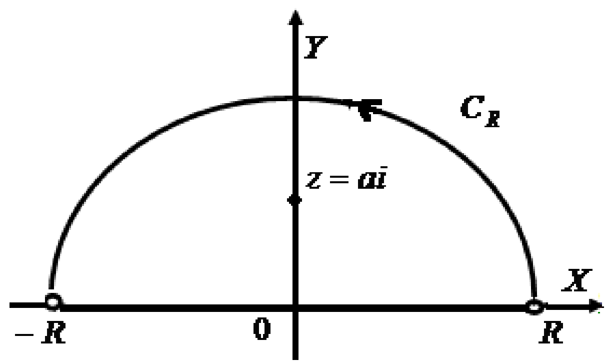
$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}$$

ёрдамчи функциядан ва 4-чизмадаги контурни танлаб оламиз. $C_R$ да

$$g(z) = \frac{1}{z^2+a^2}$$

функция $|g(z)| < \frac{1}{R^2-a^2}$ тенгсизликни қаноатлантиради ва (у Жордан леммаси бўйича) $R\to\infty$ да 0 га текис интилади. У ҳолда Жордан леммасига кўра

$$\int_{C_R} f(z)dz = \int_{C_R} g(z)e^{iz}dz \to 0$$




**4–чизма. Ярим айлана контури.**

Ихтиёрий $R > 0$ учун чегирмалар ҳақидаги теоремага асосан

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}dx}{x^2 + a^2} + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \frac{e^{-a}}{2ai}$$

га эга бўламиз. Бу тенгликда $R \to \infty$ да лимитга ўтсак, қуйидаги тенглик ҳосил бўлади.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{ae^a}.$$

Интеграл остидаги функциянинг ҳақиқий қисмини ажратиб, унинг жуфтлигидан фойдалансак

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos xdx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2ae^a}.$$

**3-мисол.** Қуйидаги

$$I = \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = si\infty \qquad (5)$$

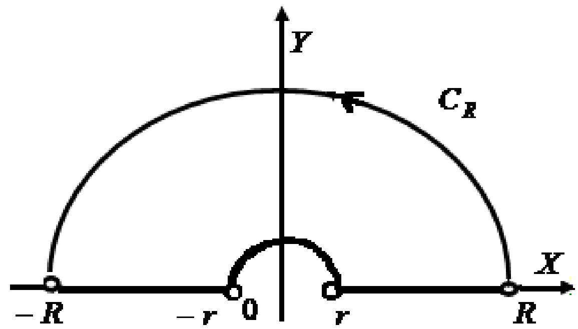
Дирихле интегралини ҳисоблаш учун биз

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

ёрдамчи функцияни оламиз. Интеграллаш контурини 5-чизмадаги кўрсатилганидек танлаб оламиз. $z = 0$ нуқта $c_r$ кичкина ярим айланани айланиб чиқади ёки бу $f(z)$ нинг махсус нуқтасидир.

Коши теоремасига асосан қуйидаги тенглик ўринли бўлади.

$$\int_{-R}^{-r} f(z)dz + \int_{c_r} f(z)dz + \int_{r}^{R} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz = 0.$$




**5-чизма. Ярим айлана контури**

Жордан леммасидан кўриниб турибдики,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$$

$\int_{c_r} f(z)dz$ ни баҳолаш учун биз $z=0$ атрофида $f(z)$ нинг Лоран ажралишини кўриб ўтамиз: бу ажралиш қуйидаги кўринишда

$$f(z) = \frac{1 + iz + \frac{(iz)^2}{2} + \dots}{z} = \frac{1}{z} + P(z)$$

бўлади. Бу ерда $P(z)$ – $z=0$ да узлуксиз бўлган функция. Бу ердан кўриниб турибдики

$$\int_{c_r} f(z)dz = \int_{c_r} \frac{dz}{z} + \int_{c_r} P(r)dz = \int_{\pi}^{0} \frac{re^{i\varphi}d\varphi}{re^{i\varphi}} + O(r) = -\pi + O(r)$$

Бундай ҳолда Коши теоремасини

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}dx}{x} + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}dx}{x} = i\pi + O(r) + O(\frac{1}{R}).$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Биринчи интегралдаги $x$ ни $-x$ га айлантирганда

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix}}{x}dx$$

га тенглиги ва буни иккинчи интеграл билан бирлаштирсак, биз

$$\int_{r}^{R}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx = i\pi + O(r) + O(\frac{1}{R})$$

га эга бўламиз. $r \to 0$ ва $R \to \infty$ да лимит

$$si\infty = \int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2} \qquad (6)$$

лигини оламиз.

Кейинги мисолларимизда кўрсатгичли функцияларни ўзида мужассам этган интегрални ҳисоблашни келтириб ўтамиз.

**4-мисол**. Қуйидаги $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}dx}{1+e^{x}}$ интегрални ҳисоблаш учун биз

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^{z}}$$

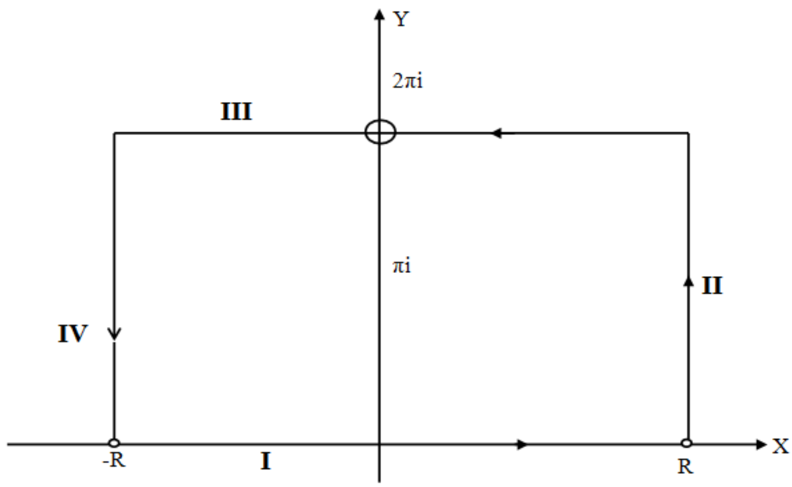
функцияни қарайлик. $z$ $2\pi i$ мавҳум айланишга эга бўлган хоссасидан у $e^{2\pi i a}$ ўзгармас кўпхадга кўпаяди. 6-чизмада кўрсатиб қўйилган тўғри бурчак контури бўйича $f(z)$ ни шунга мос интеграллаймиз. Буни ичида $f(z)$ $c_{-1} = -e^{a\pi i}$ чегирма билан биринчи тартибли $z = \pi i$ қутбга эга бўлади. Демак, чегирмалар ҳақидаги теорема бўйича

$$\int_{I}\frac{e^{az}dz}{1+e^{z}} + \int_{II}\frac{e^{az}dz}{1+e^{z}} + \int_{III}\frac{e^{az}dz}{1+e^{z}} + \int_{IV}\frac{e^{az}}{1+e^{z}} = -2\pi i e^{a\pi i}$$

бўлади.

$$\int_{I}\frac{e^{az}dz}{1+e^{z}} = \int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}dx}{1+e^{x}}, \quad \int_{III}\frac{e^{az}dz}{1+e^{z}} = \int_{-R}^{R}\frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}dx = -e^{2a\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}dx}{1+e^{x}}$$

ларга эгамиз.




**6-чизма. Тўртбурчак контур**

ИИ ва ИВ кесмаларга мос

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}\right| \le \frac{e^{aR}}{e^{R}-1} = \frac{e^{(a-1)R}}{1-e^{-R}},$$

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}\right| \le \frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}}.$$

Демак, $0<a<1$ бўлса унда $R\to\infty$ да иккала $\int\limits_{II}\frac{e^{az}dz}{1+e^{z}}$ ва $\int\limits_{IV}\frac{e^{az}dz}{1+e^{z}}$ интеграл ҳам $0$ га интилади.

Шундай қилиб, $0<a<1$ да

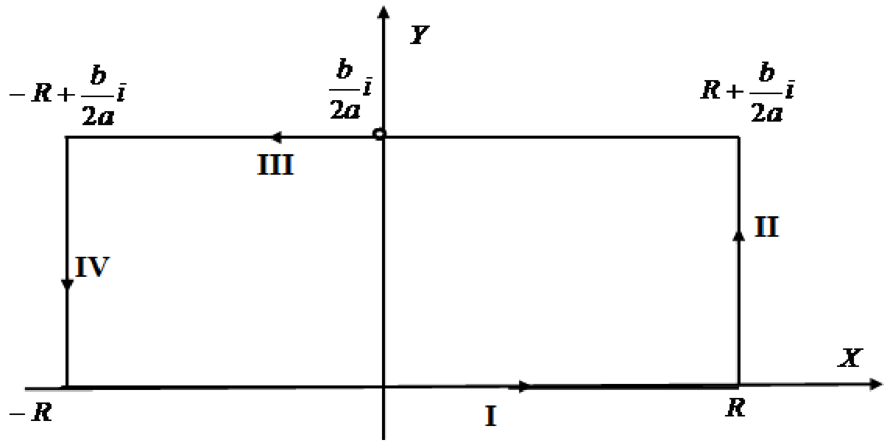
$$\left(1-e^{2a\pi i}\right)\int\limits_{-R}^{R}\frac{e^{ax}dx}{1+e^{x}} + O\left(\frac{1}{r}\right) = -2\pi i e^{a\pi i})$$

бўлади ва $R\to\infty$ даги лимитдан изланаётган интегралимизга эга бўламиз.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx = \pi\frac{2i}{e^{a\pi i}-e^{-a\pi i}} = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}, \quad (0<\alpha<1) \qquad (7)$$

**5-мисол.** $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-ax^2}\cos bxdx$ Пуассон интегралини ҳисоблаш учун $f(z)=e^{-az^2}$ функцияни қараймиз ва унинг ҳақиқий ўқдаги интеграли машҳур натижа $(erf\infty=1)$ асосида ҳисобланади,

$y = h$ тўғри чизиқда эса у




**7-чизма. Тўртбурчак контури**

$$e^{-a(x+ih)^2} = e^{ah^2} \cdot e^{-ax^2} (\cos 2ahx - i \sin 2ahx)$$

функцияга айланади, $h = \dfrac{b}{2a}$ бўлган ҳолда ҳақиқий қисми ўзгармас кўпҳадли интеграл ости функциядан фарқ қилади. Бунга мос ҳолда биз 7-чизмада кўрсатилганидек интеграллаш контурини танлаб оламиз. Коши теоремасига асосан

$$\int_I e^{-ax^2} dx + \int_{II} e^{-ax^2} dx + \int_{III} e^{-ax^2} dx + \int_{IV} e^{-ax^2} dx = 0 \qquad (8)$$

бўлади. Бу ерда

$$\int_I e^{-ax^2} dx = \int_{-R}^{R} e^{-ax^2} dx = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^{R\sqrt{a}} e^{-t^2} dt \quad , \quad \int_{III} e^{-ax^2} dx = -e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-R}^{R} e^{-ax^2} e^{-ibx} dx$$

II ва IV кесмаларда $x = \pm R$ бўлганда

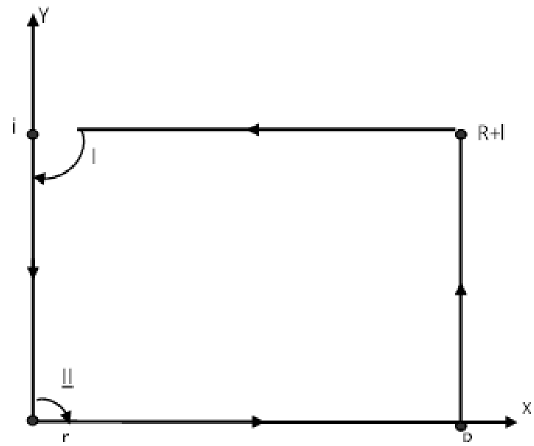
$$\left| e^{-ax^2} \right| = e^{-a(R^2 - y^2)} \le e^{\frac{b^2}{4a}} e^{-aR^2} ;$$

бўлади. Демак, агар $a > 0$ бўлса, $erf\infty = 1$ ни қўллаб

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} - e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-bx} dx = 0$$

ни топамиз. Бу ердан эса ҳақиқий қисмларни таққослашдан якуний ечимга келамиз:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cos bx dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{-\frac{b^2}{4a}} (a>0) \quad (9)$$




**8- чизма.** Тўртбурчак контури

**6-мисол.** $\int_0^{\infty} e^{-\pi x}\frac{\sin ax}{sh\pi x}dx$ Лежандр интегрални ҳисоблаш учун биз $f(z)=\frac{e^{iax}}{e^{2\pi z}-1}$ ёрдамчи функцияни оламиз ва уни 8-чизмада кўрсатилган контур бўйича интеграллаймиз. $f(x+i)=e^{-a}f(x)$ эканлигидан интегралнинг юқори ва қуйи чегараларини бир қилиб бирлаштириш мумкин.

$$(1-e-a)\int_r^R f(x)dx,$$

$x=R$ кесма бўйича интеграл $R\to\infty$ да 0 га интилади (6-мисолга қаранг). $x=0$ кесмада эса $z=iy$ деб оламиз. Унда Коши теоремасига асосан

$$(1-e^{-a})\int_r^R - i\int_r^{1-r}\frac{e^{-ay}dy}{e^{2\pi iy}-1}+\int_I+\int_{II}+O(\frac{1}{R})=0 \quad (10)$$

Бу ерда I ва II (8-чизма) айланадаги ёйларни ифодалайди. $z=i$ нуқта яқинида биз

$$f(z)=\frac{e^{iaz}}{e^{2\pi(z-i)}-1}=\frac{e^{-a}+c_1(z-i)+\ldots}{2\pi(z-i)+c_2'(z-i)^2+\ldots}=\frac{e^{-a}}{2\pi}\frac{1}{z-i}+P(z-i)$$

га эгамиз. Бу ерда $P(z-i)$ _ $z=i$ нуқтадаги тўғри функция.

I ёйда биз $z = i + re^{i\varphi};\ dz = rie^{i\varphi}d\varphi$ га эгамиз, унда

$$\int_I = \frac{e^{-a}}{2\pi}\int_0^{-\pi/2}\frac{rie^{i\varphi}d\varphi}{re^{i\varphi}} + O(r) = -\frac{ie^{-a}}{4} + O(r)$$

бўлади.

$$\int_{II} = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{0} id\varphi + O(r) = -\frac{i}{4} + O(r)$$

га ўхшаб (10) тенглик

$$(1-e^{-a})\int_r^R = i\int_r^{1-r}\frac{e^{-ay}}{e^{2\pi iy}-1}dy + \frac{i}{4}(i+e^{-a}) + O(r) + O(\frac{1}{R})$$

кўринишни олади. Бу ерда мавҳум қисмни ажратиб олиб ва уни $r \to 0$, $R \to \infty$ да лимитга ўтайлик.

$$\mathrm{Re}\int_r^{1-r}\frac{e^{-ay}dy}{e^{2\pi iy}-1} = -\int_r^{1-r}\frac{e^{-ay}}{2}dy = \frac{1}{2a}(e^{-a}-1) + O(r)$$

ни ҳисобга оламиз ва якуний ечимга

$$\int_0^{\infty} e^{-\pi x}\frac{\sin ax}{sh\pi x}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+e^{-a}}{1-e^{-a}} - \frac{1}{a} = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{a}+1}{e^{a}-1} - \frac{1}{a} \quad (a>0) \qquad (11)$$

га эга бўламиз.

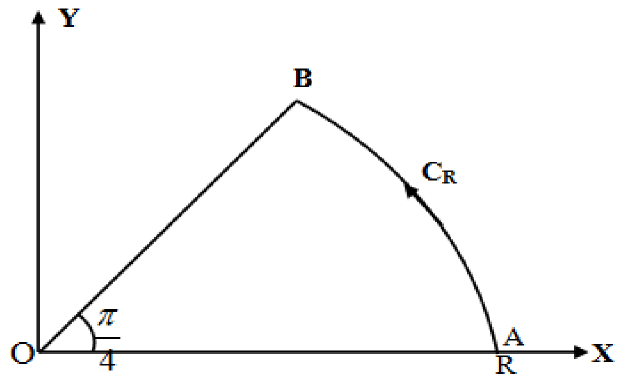
**7-мисол**. Куйидаги

$$I_1 = \int_0^{\infty}\cos x^2 dx, \quad I_2 = \int_0^{\infty}\sin x^2 dx$$

Френелли интегралларини ҳисоблаш учун биз $f(z) = e^{iz^2}$ ёрдамчи функцияни танлаб оламиз ва 9-чизмада кўрсатилган контурни танлаймиз. $z^2 = \zeta$ ни алмаштиришдан сўнг $C_R$ ёйда биз

$$\int_{C_R} f(z)dz = \frac{1}{2}\int_{C'_{R^2}}\frac{ei\zeta d\zeta}{\sqrt{\zeta}},$$

га эга бўламиз. Бу ерда $C'_{R^2}$ – $R^2$ радиусли айлананинг тўртдан бир қисмидир.




**9-чизма.** $C_R$ **йй**

Демак, Жордан леммасига асосан бу интеграл $R \to \infty$ да 0 га интилади. Коши теоремасига асосан, агар $OA$ га $z = x$ ни, $\alpha$ ни эса $OB$ га қўйсак: $z = t\sqrt{i}$ бўлади. Бундан эса биз

$$\int_0^R e^{ix^2} dx = \sqrt{i}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

га эга бўламиз. $R \to \infty$ да лимитга ўтишда ва $erf\infty = 1$ қийматдан фойдаланиб, биз

$$\int_0^\infty e^{ix^2} dx = \sqrt{i}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ни оламиз. Бу ерда ҳақиқий ва мавҳум қисмларни ажратиб олиб

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad (12)$$

ни топамиз. Френелли интеграли деб номланувчи

$$S(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}} dt, \quad C(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}} dt \qquad (13)$$

махсус функциялар боғликдир.

Бу функциялар $t = \tau^2$ да

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \sin \tau^2 d\tau, \quad C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \cos \tau^2 d\tau$$

тенглигини беради.

Демак, (12) формулани

$$S(\infty) = C(\infty) = \frac{1}{2} \qquad (14)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Кўп қийматли функцияларни сақловчи интегралларни ҳисоблашни бошлайлик.

**8-мисол.** Ушбу

$$\int_0^\infty \frac{\ln x dx}{(x+a)^2 + b^2}$$

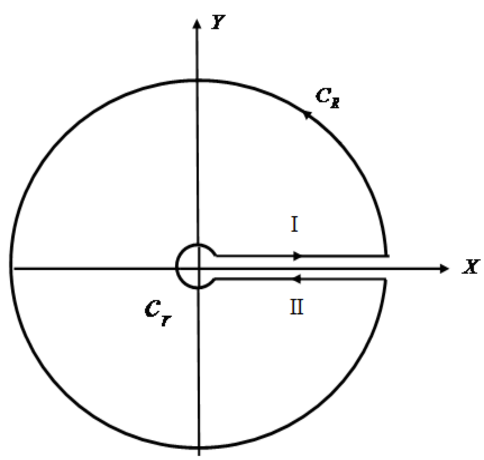
интегрални ҳисоблаш учун

$$f(z) = \frac{\ln^2 z}{(z_1 + a)^2 + b^2}$$

ёрдамчи функция ва 10-чизмадаги кўрсатилган контурни танлаб оламиз. Бу контурга кирувчи кесимнинг юқори ва қуйи қирғоқларида $\ln^2 x$ дан олинган интеграл ўзаро камаювчи ва бундан эса изланаётган интегрални ҳисоблаш имконияти пайдо бўлади. Контур ичида қуйида берилган чегирмалар билан берилган $f(z)$ функциянинг 2 та биринчи тартибли $z_{1,2} = -a \pm bi$ қутблари ётади ва

$$c'_{-1} = \frac{1}{2bi}\{\ln r + i(\pi - \varphi)\}^2, \quad c''_{-1} = -\frac{1}{2bi}\{\ln r + i(\pi + \varphi)\}^2,$$

бу ерда $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ва $\varphi = arctg\frac{b}{a}$ дир.




10-чизма. Айлана контури

Чегирмалар ҳақидаги теоремани қўллаб,

$$\int_{I}\frac{\ln xdx}{(x+a)^2+b^2}+\int_{C_R}\frac{\ln xdx}{(x+a)^2+b^2}+\int_{II}\frac{\ln xdx}{(x+a)^2+b^2}+\int_{c_r}\frac{\ln xdx}{(x+a)^2}=\frac{\pi}{b}4\varphi(\pi-i\ln r)$$

ни оламиз.

Юқорида айтиб ўтилганга мос ҳолда

$$\int_{I}\frac{\ln xdx}{(x+a)^2+b^2}+\int_{II}\frac{\ln xdx}{(x+a)^2+b^2}=-\int_{r}^{R}\frac{4\pi i\ln x-4\pi^2}{(x+a)^2+b^2}dx$$

га эгамиз.

Олдинги мисолдагига кўра

$$\lim_{r\to\infty}\int_{c_r}\frac{\ln xdx}{(x+a)^2+b^2}=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\ln xdx}{(x+a)^2}=0$$

лигини исботлайлик. Унда $r\to 0$, $R\to\infty$ да лимитда

$$4\pi^2\int_0^\infty\frac{dx}{(x+a)^2+b^2}-4\pi i\int_0^\infty\frac{\ln xdx}{(x+a)^2+b^2}=\frac{4\pi\varphi}{b}(\pi-i\ln r)$$

га эга бўламиз. Бу ердан мавҳум қисмларни таққослашдан биз излаётган интегрални топамиз:

$$\int_0^\infty\frac{\ln xdx}{(x+a)^2+b^2}=\frac{\varphi\ln r}{b}=\frac{\ln\sqrt{a^2+b^2}}{b}arctg\frac{b}{a}$$

9-мисол. Худди ўша контур орқали $\int_0^\infty\frac{x^{a-1}}{1+x}dx$, $(0<a<1)$ Эйлер интеграли ҳам ҳисобланади. Агар ёрдамчи функция сифатида

$$f(z)=\frac{z^{a-1}}{1+z}=\frac{e^{(a-1)\ln z}}{1+z}$$

олинса, кесманинг қуйи чегараси $f(xe^{2\pi i})=e^{2a\pi i}f(x)$ дир. Зарурий ҳисоблашлар ва баҳолашларни бажаргач

$$\int_0^\infty\frac{x^{a-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin a\pi},\quad(0<a<1)\qquad(15)$$

ни оламиз.

$x=e^t$ алмаштириш бажарилганда бу интеграл худди олдинги 4-мисолдаги интегралга олиб келинади.

**Муҳокама**

Ўйлаймизки, баъзи ҳисоблаш мураккаб бўлган хосмас интегралларнинг қийматларини чегирмалардан фойдаланган ҳолда ҳисоблаш ва интегралларни ҳисоблашда қулайлик туғдирадиган йўлларини топиш масаласининг ўрганилиши интеграллар назариясининг замонавий концепцияларини осонроқ тушунишга ёрдам беради ва шунингдек, комплекс анализнинг татбиқлари бобининг ривожланишига асос бўлади ҳамда математик анализнинг баъзи масалаларини ҳал қилиш усулларини янада кўпайтиради.

**Хулоса**

Мазкур ишда асосан, математик анализ курсидаги аҳамият молик бўлган ва математиканинг бошқа соҳалари ривожида муҳим саналган бир қатор интеграллар: Лаплас интеграли, Дирихле интеграли, Пуассон интеграли, Лежандр интеграли, Френели интеграллари чегирмалар ҳақидаги маълумотлар ва тасдиқлардан фойдаланиб қийматлари содда усулда ҳисоблаб кўрсатилган.

**Адабиётлар рўйхати**

1. Худойберганов Г., Ворисов А., Мансуров Ҳ. Комплекс анализ. Т., “Университет” ,1998.
2. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М., “Наука”, 1976.
3. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.