ISSN: 2181-3132

ELLIPTIK TENGLAMA UCHUN DIRIXLE-NEYMAN CHEGARAVIY MASALASI YECHIMINING YAGONALIGI HAQIDA

Sayfullayeva Shahlo Shavkatovna

Buxoro davlat universiteti, Fizika-matematika fakulteti talabasi

https://doi.org/10.5281/zenodo.6560146

ANNOTATSIYA: Maqolada ikkita buzilish chizig'iga ega ikkinchi tartibli elliptik tipdagi tenglama uchun Dirixle-Neyman ($\boldsymbol{ND_1}$) chegaraviy masalasi yechimining yagonaligi isbotlangan. Masala yechimining yagonaligini isbotlashda elliptik tenglamalar uchun ekstremum prinsipini tadbiq qilib bo'lmasligi bayon qilingan. Chegaraviy masala ekvivalent integro-differensial tenglamaga keltirilgan va uni yagona yechimga ega bo'lishidan foydalanib, $\boldsymbol{ND_1}$ chegaraviy masalasi yechimining yagonaligi isbotlangan.

Kalit so'zlar: elliptik tip, giperbolik tip, aralash tip, yechimning yagonaligi, Grin funksiyasi, integro-differensial tenglama, regulyar yechim, buzilish chizig'i, ekvivalent, ketma-ket yaqinlashish usuli, qator, qatorning yaqinlashishi.

ABSTRACT: In the article proved the uniqueness of the solution of the Dirichlet-Neumann ($\boldsymbol{ND_1}$) boundary value problem for a second-order elliptic-type equation with two distortion lines. It has been stated that some methods cannot be applied in proving the uniqueness of a solution. The problem is reduced to an equivalent integro-differential equation, and using it to have a single solution, the uniqueness of the solution of the boundary value problem $\boldsymbol{ND_1}$ is proved.

Keywords: elliptical type, elliptical, hyperbolic type,function of Green, integro-differential equation, regular solution, distortion line, equivalent,series approximation method, series convergence of series.

Bitta buzilish chizig'iga ega bo'lgan elliptik, giperbolik va aralash tipdagi tenglamalar uchun asosiy fundamental adabiyotlar bo'lib F.Trikomi va M.M.Smirnovlarning [1-3] kitoblari hisoblanadi. Ikkita buzilish chizig'iga ega elliptik, giperbolik va aralash tipdagi tenglamalar uchun esa o'zbek olimlari akademik M.S.Saloxitdinov va professor B.Islomovlarning monografiyalarini [4] keltirish mumkin.

Tenglamada ikkita buzilish chizig'iga ega xususiy hosilali differensial tenglamalar yo'nalishida olib borilgan asosiy fundamental ishlar bayon qilingan bo'lib, taklif qilingan matematik usullar va tenglamalarning xususiyatlari [1-3] da olib borilgan izlanishlardan ishlardan farq qiladi.

Aytish joizki, [4] da olib borilgan ilmiy ishlarda ikkita buzilishi chizig'iga ega bo'lgan tenglamalar qaralgan bo'lsada, buzilish tartibi turlicha, ya'ni

$$y^m U_{xx} + x^n U_{yy} = 0, \qquad (1)$$

bo'lib, taklif qilinayotgan nazariyada m va n lar musbat va ular o'zaro teng bo'la olmaydi. $m = n$ bo'lsa maxsus hol hisoblanadi.

[5-6] maqolada ikkita buzilish chizig'iga ega ikkinchi tartibli elliptik tipga tegishli xususiy xosilali differensial tenglamalar uchun ba'zi chegaraviy masalalar keltirilgan va shu tenglamalar uchun qo'yilgan bir qator chegaraviy masalalar tahlil qilingan.

Ushbu maqolada o'rganilayotgan masalada kvazichiziqli tenglamaning buzilish tartibi (bu yerda ikkinchi tartibli hosilalar oldidagi koeffitsientlar - x va y ning darajasi tartibi nazarda tutilyapti) bir xil va m musbat bo'lgan hol qaraladi, ya'ni:

$$y^m U_{xx} + x^m U_{yy} = f\left(x, y, U, U_x, U_y\right) \qquad (2)$$

ikkinchi tartibli tenglama uchun $\boldsymbol{ND_1}$ chegaraviy masalasi o'rganilgan va o'ng tomondagi funksiyaga shartlar qo'yilgan holda yechimining (agar mavjud) yagona bo'lishi isbotlangan.

Ω −chegaraviy masala qaralayotgan soha bo'lib, $x > 0$ va $y > 0$ da $A(1,0)$ va $B(0,1)$ nuqtalarni tutashtiruvchi normal egri chiziq: : $\sigma_0: x^{2p} + y^{2p} = 1$, $y = 0$ o'qidagi OA va $x = 0$ o'qidagi OB kesma bilan chegaralangan bo'lsin. Kelgusida qulay bo'lishi uchun quyidagicha belgilashlarni kiritamiz:

$$I_1 = \{(x,y)\}: 0 < x < 1, \;\; y = 0,$$

$$I_2 = \{(x, y): x = 0,\ \ 0 < y < 1\},$$

$$P = \{(x, y) \in (\bar{\Omega}), -\infty < U, U_x, U_y < +\infty\},$$

$$2p = m + 2,\ \ 2\beta = m/(m + 2).$$

Ta'rif. Ω sohada (2) tenglamaning regulyar yechimi deb (1) tenglamani qanoatlantiruvchi $U(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ hamda $O(0,0)$ va $A(1,0)$, $B(0,1)$ nuqtalardan tashqari $\partial\Omega$ da birinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega funksiyaga aytiladi, $O(0,0)$ va $A(1,0)$, $B(0,1)$ nuqtalarda esa mos ravishda birdan kichik va æ tartibli cheksizlikka intilishi mumkin, bu yerda æ — yetarlicha kichik musbat son.

$\boldsymbol{ND_1}$ **masalasi.** Qaralayotgan Ω sohada (2) tenglamani berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi regulyar yechimini toping:

$$U(x, y) = \varphi(x, y), \qquad (x, y) \in \sigma,$$

$$U|_{OA} = \tau(x)\,, \qquad (x, 0) \in \bar{I}_1\,,$$

$$\lim_{x \to +0} \frac{\partial U}{\partial x} = \nu(y), \qquad (0, y) \in I_2,$$

bunda $\varphi(x, y)$, $\tau(x)$, $\nu(y)$ – berilgan uzluksiz funksiyalar, $\nu(y)$ funksiya $O(0,0)$ va $B(0,1)$ nuqtalarda mos ravishda birdan kichik va æ tartibli cheksizlikka intilishi mumkin, $\varphi(1,0) = \tau(1)$.

[7-8] maqolalardagi lemmaga asosan (2) tenglama uchun $\boldsymbol{ND_1}$ chegaraviy masalasi ekvivalent ravishda quyidagi integro-differensial tenglamaga keltiriladi:

$$U(x, y) = -\iint\limits_{\Omega} f(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta) G_3(\xi, \eta; x, y)\, d\xi d\eta, \qquad (3)$$

bunda $G_3(\xi, \eta; x, y)$ — (2) tenglama uchun $\boldsymbol{ND_1}$ chegaraviy masalasining Grin funksiyasi [9].

(3) integro-differensial tenglamaning yechimi mavjudligi ketma-ket yaqinlashish usuli orqali isbotlangan.

Asosiy nazariyaga asosan nolinchi yaqinlashish uchun $U_0(x,y)=0$ deb qabul qilamiz.

Agar $n-$ yaqinlashish topilgan bo'lsa, $(n+1)-$ yaqinlashishni quyidagi formuladan foydalanib topamiz:

$$U_{n+1}(x,y)=-\iint_{\Omega} G_3(\xi,\eta;x,y)f\left(\xi,\eta,U_n,\frac{\partial U_n}{\partial \xi},\frac{\partial U_n}{\partial \eta}\right)d\xi d\eta \qquad (4)$$

Grin funksiyasini x va y bo'yicha hosilasini hisoblab quyidagilar topiladi:

$$\frac{\partial U_{n+1}(x,y)}{\partial x}=-\iint_{\Omega} G_{3x}(\xi,\eta;x,y)f\left(\xi,\eta,U_n,\frac{\partial U_n}{\partial \xi},\frac{\partial U_n}{\partial \eta}\right)d\xi d\eta,$$

$$\frac{\partial U_{n+1}(x,y)}{\partial y}=-\iint_{\Omega} G_{3y}(\xi,\eta;x,y)f\left(\xi,\eta,U_n,\frac{\partial U_n}{\partial \xi},\frac{\partial U_n}{\partial \eta}\right)d\xi d\eta,$$

bu yerda $n=0,1,\ldots$.

Aytish joizki, joriy yilning 26-28 may kunlarida Toshkent Kimyo-texnologiya instituti tomonidan tashkil qilingan «Mexanika va matematikaning amaliy muammolari» Respublika ilmiy-amaliy konferensiyaga taqdim qilingan «Buzilish chizig'iga ega elliptik tenglama uchun ND_1 chegaraviy masalasini yechimining mavjudligi haqida» maqolada yechimning mavjudligi isbotlangan va quyidagi baholar keltirilgan:

$$|U_{n+1}-U_n|\le C_1CM(C_3NC)^n, \qquad (5)$$

$$\left|\frac{\partial U_{n+1}}{\partial x}-\frac{\partial U_n}{\partial x}\right|\le C_2CM(C_3NC)^n, \qquad (6)$$

$$\left|\frac{\partial U_{n+1}}{\partial y}-\frac{\partial U_n}{\partial y}\right|\le C_2CM(C_3NC)^n, \qquad (7)$$

bu yerda $n=0,1,\ldots,$

$$C=max\left(2C_1,\ \frac{\delta^{2-2\beta}}{(1-\delta)^{4-4\beta}}C_1,\ 8\,\delta^{-4\beta}C_1\right),$$

$$0 < \delta \leq 1/4,\ M = \max_{\Omega} |f_1(x, y, 0,0,0)|,$$

$$N = \max_{P} \left| |f_{1u}|, |f_{1u_x}|, \left|f_{1u_y}\right| \right|,$$

C_1, C_2, C_3 lar esa berilganlarga bog'liq aniq sonlar bo'lib, ularning aniq ko'rinishi Toshkent Kimyo-texnologiya instituti tomonidan tashkil qilingan «Mexanika va matematikaning amaliy muammolari» Respublika ilmiy-amaliy konferensiya materiallarida berilgan ($f_1(x, y, U, U_x, U_y) -$ funksiya bo'yicha shartlar quyida berilgan).

Faraz qilamiz, $f(x, y, U, U_x, U_y)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$f(x, y, U, U_x, U_y) = (xy)^{2p+1} f_1(x, y, U, U_x, U_y), \qquad (8)$$

bunda $f_1(x, y, U, U_x, U_y)$ – funksiya P da uzluksiz va barcha argumentlari bo'yicha birinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega hamda σ_0 da $1 + \alpha$ tartibli nolga aylansin, $\alpha -$ yetarlicha kichik musbat son va

$$\max_{P} \left| |f_1|, |f_{1U}|, |f_{1U_x}|, \left|f_{1U_y}\right| \right| \leq const.$$

(3) integro-differensial tenglamaning (5)-(7) baholarni qanoatlantiruvchi yechimini yagona ekanligini isbotlaymiz.

Shu o'rinda aytish joizki, yechimning yagonaligini isbotlash uchun elliptik tenglamalar uchun ekstremum printsipidan foydalanib isbotlab bo'lmaydi. Chunki, qaralayotgan sohaning chegarasida funksiyaning qiymatlari to'liq berilmagan, ya'ni, sohaning bir qismida funksiyaning x bo'yicha hosilasini qiymati berilgan.

$V(x, y) -$ funksiya (3) tenglamani (5)-(7) baholarni qanoatlantiruvchi birorta yechimi bo'lsin.

$$V_n(x, y) = V(x, y) - S_n(x, y), \qquad (9)$$

ayirmani qaraymiz, bu yerda

ISSN: 2181-3132

Yosh Tadqiqotchi Jurnali

2nd Sun

$$S_0(x,y) = U_0(x,y),$$

$$S_n(x,y) = U_0(x,y) +$$

$$\sum_{k=1}^{n} (U_k((x,y) - U_{k-1}(x,y)), n = 1,2, \dots \ . \qquad (10)$$

$n = 0$ bo'lsin. (5)-(7) baholarni inobatga olib, (9) dan

$$|V_0(x,y)| \le C_4 N_1, \qquad (11)$$

$$\left|\frac{\partial V_0(x,y)}{\partial x}\right| \le C_5 N_1, \qquad (12)$$

$$\left|\frac{\partial V_0(x,y)}{\partial y}\right| \le C_5 N_1 \qquad (13)$$

ekanligini topamiz, bunda $C_4 = C_1 CM$, $C_5 = C_2 CM$, $N_1 = (1 - C_3 CN)^{-1}$.

$n = 1$ bo'lsin. Grin funksiyasi va x va y bo'yicha hosilasining baholari [10], (11)-(13) hamda (8) foydalanib, (10) dan

$$|V_1(x,y)| \le$$

$$\left|\iint_{\Omega_0} G_3(\xi,\eta;x,y)\left(f(\xi,\eta,V,V_\xi,V_\eta) - f(\xi,\eta,S_1,\frac{\partial S_1}{\partial \xi},\frac{\partial S_1}{\partial \eta})\right) d\xi d\eta\right| \le$$

$$\le \iint_{\Omega_0} |G_3(\xi,\eta;x,y)| \times \left(f_{1u}\left|V_0\right| + \left|f_{1u_\xi}\right|\left|\frac{\partial V_0}{\partial \xi}\right| + \left|f_{1u_\eta}\right|\left|\frac{\partial V_0}{\partial \eta}\right|\right) \cdot$$

$$(\xi\eta)^{2p+1} d\xi d\eta \le$$

$$\le C_6 N_1 N \iint_{\Omega} |G_3(\xi,\eta;x,y)|(\xi\eta)^{2p+1} d\xi d\eta \le$$

$$\leq C_6 N_1 (C_3 NC),$$

ekanligini topamiz, bunda $C_6 = max(C_4, C_5)$.

Yuqoridagilarga o'xshash ravishda

$$\left|\frac{\partial V_1(x,y)}{\partial x}\right| \leq C_6 N_1 (C_3 CN),$$

$$\left|\frac{\partial V_1(x,y)}{\partial y}\right| \leq C_6 N_1 (C_3 CN)$$

baholarga ega bo'lamiz.

Matematik induksiya usulini qo'llab,

$$|V_n(x,y)| \leq C_6 N_1 (C_3 CN)^n, \qquad n = 1,2,\ldots \tag{14}$$

bo'lishini topamiz.

Agar $N < (C_3 C)^{-1}$ bo'lsa, $n \to \infty$ da (10) ifoda va (14) bahodan $V_n(x,y) \to 0$ ni topamiz. Bundan $S_n(x,y) \to U(x,y)$ bo'lishi kelib chiqadi.

Demak , $V(x,y) = U(x,y)$.

(3) integro-differensial tenglamaning yechimi yagonalagidan, (2) tenglama uchun $\boldsymbol{ND_1}$ chegaraviy masalasining yechimi yagona bo'lishi kelib chiqadi.

Quyidagi teorema o'rinli.

Teorema. Agar (8) shart bajarilsa va $N < (\mathrm{C}_3\bar{\mathrm{C}})^{-1}$ bo'lsa, $\boldsymbol{ND_1}$ chegaraviy

masalasi bittadan ko'p yechimga ega bo'lmaydi.

Ikkita buzilish chizig'iga ega ikkinchi tartibli elliptik, giperbolik va aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar [11-33] maqolalarda o'rganilgan.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. Москва, Гостехиздат, 1947, 192 с.

2. Смирнов М.М. Вырождающиеся гиперболические уравне-ния. Минск, Вышейшая Школа, 1977, 159 с.

3. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. Москва, Наука, 1985, 304 с.

4. Салахитдинов М.С., Исломов Б.И. Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. Ташкент, «Мумтозсуз», 2009, 263 с.

5. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Buzilish chizig'iga ega bo'lgan elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo'yiladigan chegaraviy masalalar haqida // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.46-54.

6. Rasulov Kh.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Analysis of Some Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations with Two Lines of Degeneracy // Irish Interdisciplinary Journal of Science & Research (IIJSR), 6:2 (2022), p. 8-14.

7. Sayfullayeva Sh.Sh. Elliptik tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning Grin funksiyalari haqida // Journal of new century innovations, 3:3 (2022), 7-18 b.

8. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega elliptik tenglama uchun chegaraviy masalaning yechimi haqida // Models and methods for increasing the efficiency of innovative research, Germany, 10 (2022), p. 184-186.

9. Менгзияев Б. Некоторые краевые задачи для уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения // Дисс. канд. физ.-мат. наук (Библиотека Математического института АН Республики Узбекистан). Ташкент, 1978.

10. Sayfullayeva Sh.Sh. Elliptik tenglama uchun $\boldsymbol{ND_1}$ masalasi Grin funksiyasining bahosi haqida // Journal of new century innovations, 3:3 (2022), 19-29 b.

11. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.

12. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.

13. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Задача типа задач Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Scientific progress, 2:1 (2021), p.42-48.

14. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.

15. Расулов Х.Р. Об одной краевой задаче для уравнения гиперболического типа // «Комплексный анализ, математическая Физика и нелинейные уравнения» Международная научная конференция Сборник тезисов Башкортостан РФ (оз. Банное, 18 – 22 марта 2019 г.), с.65-66.

16. Rasulov X.R. (2020). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration // Uzbek Mathematical Journal, №3, pp.117-125.

17. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.

18. Rasulov H. Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration // Центр научных публикаций (buxdu. uz) 5:5 (2021).

19. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.

20. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.

21. Rasulov, X. (2022). Краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

22. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega giperbolik tipdagi tenglama uchun Koshi masalasi haqida // «Zamonaviy ta'lim tizimini rivojlantirish va unga qaratilgan kreativ g'oyalar, takliflar va yechimlar», 35-sonli Respublika ilmiy-amaliy on-line konferensiyasi, 2022, 192-195 b.

23. Расулов Х.Р. Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида // Аниқ фанларни касбга йуналтириб ўқитиш муаммолари ва ечимлари, Республика илмий-амалий конференция материаллари тўплами, 2018, Навоий, 14-15 б.

24. Расулов Х.Р. Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги тенглама учун нолокал масала ҳақида // Аниқ фанларни касбга йуналтириб ўқитиш муаммолари ва ечимлари, Республика илмий-амалий конференция материаллари тўплами, 2018, Навоий, 17-18 б.

25. Расулов Х.Р. Об одной краевой задаче со смещением для линейного уравнения гиперболического типа // Академик Тошмухаммад Ниёзович Кори-Ниёзийнинг хаёти ва ижоди, чет эл олимлари иштирокида илмий-амалий конференция тезислари тўплами, Тошкент, 2017, 84-85 б.

26. Rasulov X.R. Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type // Modern problems of applied mathematics and information technologies Al-Khwarizmi 2021, Fergana, Uzbekistan, p. 149.

27. Rasulov, X. (2022). Об одном краевом задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

28. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

29. Rasulov, X. (2021). Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

30. Rasulov, R. X. R. (2021). Гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

31. Rasulov, R. X. R. (2022). О краевых задачах для уравнений эллиптического типа с линией искажения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

32. Rasulov, H. (2021). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

33. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.